Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2014/2015
Quarto appello

Esercizi senza svolgimento

Esercizio 1

Sia data la funzione
$$f(x,y) = x^4 - \operatorname{sen}(x^2 + ye^y)\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Indicare:

1. se nel punto $(0,0)$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Dini affinché l'equazione $f(x,y) = 0$ definisca implicitamente una funzione $y = g(x)$ o una funzione $x = g(y)$;
2. il valore di $g'(0)$;
3. se g è convessa o concava in un intorno di zero.

Risposte

1. L'equazione definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.
2. $g'(0) = 0$.
3. g è concava in un intorno di $x = 0$.

Esercizio 2

Siano date le funzioni
$$f(x,y,z) = x^2 + 2z^2\,, \quad g(x,y,z) = x^2 + (y^2-1)^2 + z^2\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Indicare:

1. gli eventuali punti singolari del vincolo $g(x,y,z) = 1$;
2. i punti critici di f vincolati a $g(x,y,z) = 1$;
3. i punti di minimo di f vincolati a $g(x,y,z) = 1$;
4. i punti di massimo di f vincolati a $g(x,y,z) = 1$.

Risposte

1. $(0,0,0)$.
2. $(0,\pm\sqrt{2},0)$, $(\pm1,\pm1,0)$, $(\pm1,\mp1,0)$, $(0,\pm1,\pm1)$, $(0,\pm1,\mp1)$.
3. $(0,0,0)$ e $(0,\pm\sqrt{2},0)$.
4. $(0,\pm1,\pm1)$ e $(0,\pm1,\mp1)$.

Esercizi con svolgimento

Esercizio 1

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = ze^y\cos(xz)\mathbf{i} + e^y\operatorname{sen}(xz)\mathbf{j} + \big[xe^y\cos(xz) + 2z\big]\mathbf{k}\,, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,$$

e il circuito $\gamma = (\mathbf{r},\Gamma)$ parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)\,, \qquad t\in[-\pi,\pi]\,.$$

1. Calcolare $\operatorname{rot}\mathbf{F}$.
2. Se $\mathbf{F}$ è conservativo, calcolare un potenziale U di $\mathbf{F}$.
3. Calcolare la circuitazione lungo γ del campo vettoriale

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + (\cos y^2, x^3y^2 + \operatorname{sen} x^2, 0)\,.$$

Svolgimento

1. Si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ze^y\cos(xz) & e^y\operatorname{sen}(xz) & xe^y\cos(xz)+2z \end{pmatrix} \\ &= \Big[\partial_y\big(xe^y\cos(xz)+2z\big) - \partial_z\big(e^y\operatorname{sen}(xz)\big)\Big]\mathbf{i} + \\ &\quad + \Big[\partial_z\big(ze^y\cos(xz)\big) - \partial_x\big(xe^y\cos(xz)+2z\big)\Big]\mathbf{j} + \\ &\quad + \Big[\partial_x\big(e^y\operatorname{sen}(xz)\big) - \partial_y\big(ze^y\cos(xz)\big)\Big]\mathbf{k} = (0,0,0)\,.\end{aligned}$$

2. $\mathbf{F}$ è conservativo essendo irrotazionale su un insieme semplicemente connesso. Se U è un potenziale, deve essere

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y,z) = ze^y\cos(xz) \\ \partial_y U(x,y,z) = e^y\operatorname{sen}(xz) \\ \partial_z U(x,y,z) = xe^y\cos(xz) + 2z\,. \end{cases}$$

   Dalla seconda equazione si ricava che

$$U(x,y,z) = e^y\operatorname{sen}(xz) + \varphi(x,z)\,,$$

   che sostituita nella prima fornisce $\partial_x\varphi(x,z)\equiv 0$, da cui

$$U(x,y,z) = e^y\operatorname{sen}(xz) + \psi(z)\,.$$

   Dalla terza equazione si ottiene che $\psi'(z) = 2z$. Allora

$$U(x,y,z) = e^y\operatorname{sen}(xz) + z^2$$

   è un potenziale di $\mathbf{F}$.

3. Poiché $\mathbf{F}$ è conservativo si ha
$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0\,.$$
Allora, considerata la superficie
$$\Sigma = \big\{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\big\}$$
orientata con normale $\mathbf{k}$, posto
$$\mathbf{T}(x,y,z) \doteq \big(\cos y^2, x^3y^2 + \operatorname{sen} x^2, 0\big)\,,$$
grazie al teorema del rotore si ha
$$\oint_\gamma \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = \oint_\gamma \mathbf{T}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{B_1(0,0)} \operatorname{rot}\mathbf{T}(x,y,0)\cdot\mathbf{k}\,dxdy\,,$$
dove $B_1(0,0)$ è il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 sul piano xy. Si ha
$$\begin{aligned}\mathbf{T}(x,y,z) &= \begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ \cos y^2 & x^3y^2+\operatorname{sen}x^2 & 0\end{pmatrix} = \big[\partial_x\big(x^3y^2+\operatorname{sen}x^2\big) - \partial_y\cos y^2\big]\mathbf{k}\\ &= \big[3x^2y^2 + 2x\cos x^2 + 2y\operatorname{sen}y^2\big]\mathbf{k}\,.\end{aligned}$$
Osservato che
$$\iint_{B_1(0,0)} \big(2x\cos x^2 + 2y\operatorname{sen}y^2\big)\,dxdy = 0$$
per ragioni di simmetria, si ottiene
$$\begin{aligned}\oint_\gamma \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} &= 3\iint_{B_1(0,0)} x^2y^2\,dxdy = 3\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho^5\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\,d\rho d\vartheta\\ &= 3\left(\int_0^1 \rho^5\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\,d\vartheta\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(2\vartheta)\,d\vartheta\\ &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\vartheta)}{2}\,d\vartheta = \frac{\pi}{8}\,,\end{aligned}$$
dove è stato utilizzato un cambio di coordinate polari.

Esercizio 2

Sia dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e^{4t}\\0\\e^{4t}\end{pmatrix}\\ x(0)=1\,,\qquad y(0)=1\,,\qquad z(0)=0\,.\end{cases}\tag{$*$}$$

1. Verificare che
$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix}-1 & e^t & e^{3t}\\ -1 & -e^t & e^{3t}\\ 1 & 0 & 2e^{3t}\end{pmatrix}$$
è una matrice wronskiana del sistema lineare omogeneo associato a $(*)$.

2. Risolvere il problema di Cauchy $(*)$.

Svolgimento

1. Ricordiamo che $\mathbf{W}$ è matrice risolvente se $\det \mathbf{W}(t) \neq 0$ per ogni t e le sue colonne sono soluzione di
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$
cioè se vale $\mathbf{W}' = A\mathbf{W}$. Si ha $\det \mathbf{W}(t) = 6e^{4t} \neq 0$ per ogni t. Inoltre
$$\mathbf{W}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 3e^{3t} \\ 0 & -e^t & 3e^{3t} \\ 0 & 0 & 6e^{3t} \end{pmatrix} = A\mathbf{W}(t)\,,$$
da cui la conclusione.

2. Per calcolare la soluzione del problema di Cauchy dato, dobbiamo procurarci una soluzione particolare del sistema non omogeneo. Grazie al metodo della variazione delle costanti tale soluzione è data da
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t) \int_0^t [\mathbf{W}(s)]^{-1} \begin{pmatrix} e^{4s} \\ 0 \\ e^{4s} \end{pmatrix} ds\,.$$
Poiché
$$[\mathbf{W}(s)]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3e^{-s} & -3e^{-s} & 0 \\ e^{-3s} & e^{-3s} & 2e^{-3s} \end{pmatrix} ,$$
si ottiene
$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{6}\mathbf{W}(t) \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^{3s} \\ 3e^{s} \end{pmatrix} ds = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & e^t & e^{3t} \\ -1 & -e^t & e^{3t} \\ 1 & 0 & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}-1 \\ 3(e^t-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{4t} - 3e^{3t} - e^t \\ 2e^{4t} - 3e^{3t} + e^t \\ 6e^{4t} - 6e^{3t} \end{pmatrix} .$$
L'integrale generale del sistema non omogeneo è
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \mathbf{v}(t)\,, \qquad c_2, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$
Sostituendo le condizioni iniziali e tenendo conto che $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, si ha
$$\mathbf{W}(0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} -c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ -c_1 - c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + 2c_3 = 0 \end{cases} ,$$
da cui si ricava
$$c_1 = -2/3\,, \quad c_2 = 0\,, \quad c_3 = 1/3\,.$$
La soluzione cercata è
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + e^{3t} \\ 2 + e^{3t} \\ -2 + 2e^{3t} \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{4t} - 3e^{3t} - e^t \\ 2e^{4t} - 3e^{3t} + e^t \\ 6e^{4t} - 6e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{4t} - e^{3t} - e^t + 4 \\ 2e^{4t} - e^{3t} + e^t + 4 \\ 6e^{4t} - 2e^{3t} - 4 \end{pmatrix} .$$