Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 27/01/16

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 1 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [5 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{2x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Determinare se la funzione è continua in $(0,0)$.
2. Determinare se la funzione è derivabile in $(0,0)$.
3. Determinare se la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2 [7 punti]

Sia dato l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\right\},$$

e sia γ la curva percorsa una volta in senso antiorario, se vista dall'alto, e il cui sostegno è

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + 3y^2\,,\ z = 8 - x^2 - y^2\right\}.$$

1. Calcolare il volume di Ω.
2. Dato il campo vettoriale

   $$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + x^2y)\,\mathbf{i} + (y - xy^2 - 3z^2y)\,\mathbf{j} + (z + z^3)\,\mathbf{k}\,,$$

   calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso $\partial\Omega$.
3. Calcolare la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo γ.

   Sugg.: utilizzare il teorema del rotore.

Domanda facoltativa

1. Si enunci e dimostri il teorema sui moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$.
2. Si illustri il legame tra i punti critici vincolati in un problema di estremo vincolato ed i punti critici liberi della corrispondente lagrangiana.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 27/01/16

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 2 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [5 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+3y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Determinare se la funzione è continua in $(0,0)$.
2. Determinare se la funzione è derivabile in $(0,0)$.
3. Determinare se la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2 [7 punti]

Sia dato l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 \le z \le 18 - x^2 - y^2\right\},$$

e sia γ la curva percorsa una volta in senso antiorario, se vista dall'alto, e il cui sostegno è

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3x^2 + y^2\,,\ z = 18 - x^2 - y^2\right\}.$$

1. Calcolare il volume di Ω.
2. Dato il campo vettoriale

   $$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + x^2 z - 2xy)\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + (z - xz^2 - 2xy)\,\mathbf{k}\,,$$

   calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso $\partial\Omega$.
3. Calcolare la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo γ.

   Sugg.: utilizzare il teorema del rotore.

Domanda facoltativa

1. Si enunci e dimostri il teorema sui moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$.
2. Si illustri il legame tra i punti critici vincolati in un problema di estremo vincolato ed i punti critici liberi della corrispondente lagrangiana.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 27/01/16

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 3 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [5 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y^2}{\sqrt{3x^2+2y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Determinare se la funzione è continua in $(0,0)$.
2. Determinare se la funzione è derivabile in $(0,0)$.
3. Determinare se la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2 [7 punti]

Sia dato l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 36 - 3x^2 - y^2\right\},$$

e sia γ la curva percorsa una volta in senso antiorario, se vista dall'alto, e il cui sostegno è

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + 2y^2\,,\ z = 36 - 3x^2 - y^2\right\}.$$

1. Calcolare il volume di Ω.
2. Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x + x^3)\,\mathbf{i} + (y + xz)\,\mathbf{j} + (z - 3x^2 z)\,\mathbf{k}\,,$$
calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso $\partial\Omega$.
3. Calcolare la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo γ.
Sugg.: utilizzare il teorema del rotore.

Domanda facoltativa

1. Si enunci e dimostri il teorema sui moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$.
2. Si illustri il legame tra i punti critici vincolati in un problema di estremo vincolato ed i punti critici liberi della corrispondente lagrangiana.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 27/01/16

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 4 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [5 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{2x^2+5y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Determinare se la funzione è continua in $(0,0)$.
2. Determinare se la funzione è derivabile in $(0,0)$.
3. Determinare se la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2 [7 punti]

Sia dato l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 \leq z \leq 25 - x^2 - 2y^2\right\},$$

e sia γ la curva percorsa una volta in senso antiorario, se vista dall'alto, e il cui sostegno è

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + 3y^2\,,\ z = 25 - x^2 - 2y^2\right\}.$$

1. Calcolare il volume di Ω.
2. Dato il campo vettoriale

   $$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x + x^2 y)\,\mathbf{i} + (y - xy^2)\,\mathbf{j} + (2z - 2xy + x^2)\,\mathbf{k}\,,$$

   calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso $\partial\Omega$.
3. Calcolare la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo γ.

   Sugg.: utilizzare il teorema del rotore.

Domanda facoltativa

1. Si enunci e dimostri il teorema sui moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$.
2. Si illustri il legame tra i punti critici vincolati in un problema di estremo vincolato ed i punti critici liberi della corrispondente lagrangiana.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30