Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 18/02/16

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 1 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la curva di equazione polare

$$\rho = e^{2\vartheta}\,, \qquad \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

1. Scrivere una parametrizzazione della curva e calcolarne la lunghezza.
2. Calcolare l'ascissa del centroide.
3. Calcolare l'ordinata del centroide.

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + z^2\,, \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0)\,.$$

1. Provare che in un intorno di $(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2})$ l'equazione $f(x,y,z) = 1 + e/2$ definisce implicitamente una funzione $z = g(x,y)$.
2. Calcolare le derivate parziali di g in $(\sqrt{e/2}, 0)$
3. Sia ora
$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 1\right\}.$$
Calcolare massimo e minimo in Γ della funzione $\varphi(x,y,z) = x$.
N.B.: si dia per scontata l'esistenza di massimo e minimo.

Domanda facoltativa

Si riconsideri la funzione f dell'esercizio 2. Si dimostri che l'equazione

$$f(x,y,z) = 1$$

definisce implicitamente in un intorno di $(0,0,1)$ una funzione $z = \psi(x,y)$ che ha in $(0,0)$ un punto di massimo relativo.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 18/02/16

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 2 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la curva di equazione polare

$$\rho = e^{3\vartheta}\,, \qquad \vartheta \in [0, \pi]\,.$$

1. Scrivere una parametrizzazione della curva e calcolarne la lunghezza.
2. Calcolare l'ascissa del centroide.
3. Calcolare l'ordinata del centroide.

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + x^2 + z^2\,, \qquad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\,.$$

1. Provare che in un intorno di $(0, \sqrt{e/2}, \sqrt{e/2})$ l'equazione $f(x, y, z) = 1 + e/2$ definisce implicitamente una funzione $z = g(x, y)$.
2. Calcolare le derivate parziali di g in $(0, \sqrt{e/2})$
3. Sia ora
$$\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 1\right\}.$$
Calcolare massimo e minimo in Γ della funzione $\varphi(x, y, z) = y$.
N.B.: si dia per scontata l'esistenza di massimo e minimo.

Domanda facoltativa

Si riconsideri la funzione f dell'esercizio 2. Si dimostri che l'equazione

$$f(x, y, z) = 1$$

definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0, 1)$ una funzione $z = \psi(x, y)$ che ha in $(0, 0)$ un punto di massimo relativo.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 18/02/16

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 3 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la curva di equazione polare

$$\rho = e^{-2\vartheta}, \qquad \vartheta \in [\pi/2, 3\pi/2].$$

1. Scrivere una parametrizzazione della curva e calcolarne la lunghezza.
2. Calcolare l'ascissa del centroide.
3. Calcolare l'ordinata del centroide.

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} + z^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Provare che in un intorno di $(0,1,1)$ l'equazione $f(x,y,z) = e^2 + 1$ definisce implicitamente una funzione $z = g(x,y)$.
2. Calcolare le derivate parziali di g in $(0,1)$
3. Sia ora
$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = e^4\right\}.$$
Calcolare massimo e minimo in Γ della funzione $\varphi(x,y,z) = x$.
N.B.: si dia per scontata l'esistenza di massimo e minimo.

Domanda facoltativa

Si riconsideri la funzione f dell'esercizio 2. Si dimostri che l'equazione

$$f(x,y,z) = e^4 + 4$$

definisce implicitamente in un intorno di $(0,0,-2)$ una funzione $z = \psi(x,y)$ che ha in $(0,0)$ un punto di minimo relativo.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 18/02/16

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 4 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la curva di equazione polare

$$\rho = e^{-3\vartheta}\,, \qquad \vartheta \in [-\pi, 0]\,.$$

1. Scrivere una parametrizzazione della curva e calcolarne la lunghezza.
2. Calcolare l'ascissa del centroide.
3. Calcolare l'ordinata del centroide.

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} + x^2 + z^2\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

1. Provare che in un intorno di $(1,0,1)$ l'equazione $f(x,y,z) = e^2 + 2$ definisce implicitamente una funzione $z = g(x,y)$.
2. Calcolare le derivate parziali di g in $(1,0)$
3. Sia ora
$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = e^4\right\}.$$
Calcolare massimo e minimo in Γ della funzione $\varphi(x,y,z) = y$.
N.B.: si dia per scontata l'esistenza di massimo e minimo.

Domanda facoltativa

Si riconsideri la funzione f dell'esercizio 2. Si dimostri che l'equazione

$$f(x,y,z) = e^4 + 4$$

definisce implicitamente in un intorno di $(0,0,-2)$ una funzione $z = \psi(x,y)$ che ha in $(0,0)$ un punto di minimo relativo.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30