

Cognome e Nome Matr.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Il solo possesso di un telefono cellulare o di qualsiasi dispositivo in grado di connettersi ad internet, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Esercizi con svolgimento

Esercizio 1 [6 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}. \quad (*)$$

1. Calcolare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo associato.
2. Calcolare l'integrale generale di (*).
3. Calcolare la soluzione di (*) tale che $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati la funzione

$$f(x, y, z) = (x + y)z(z - 4) + 2x^2 + 2y^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R},$$

e l'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4\}.$$

1. Dimostrare che f ha massimo e minimo in D .
2. Trovare gli eventuali punti critici di f interni a D e studiarne la natura.
3. Calcolare massimo e minimo di f in D .

Domanda facoltativa

Si dimostri che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \operatorname{sen}(ty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutta la retta reale.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30