Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 19/09/16

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare o di qualsiasi dispositivo in grado di connettersi ad internet, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Esercizi con svolgimento

Esercizio 1 [7 punti]

Sia dato l'insieme

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}\,.$$

1. Disegnare D.
2. Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_D (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz\,.$$
3. Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, yz^2, 1)\,,$$
dopo aver verificato che $\operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 + z^2$, calcolare il flusso di F attraverso la porzione della frontiera di D data dalla superficie
$$\Sigma = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2,\ z = x^2 + y^2\right\},$$
orientata in modo che in $(0, 0, 0)$ la normale sia $-\mathbf{k}$.

Esercizio 2 [5 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2) + x^3 + y^2\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

1. Provare che in un intorno di $(0, 1)$ l'equazione $f(x, y) = 1 + \pi/4$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$.
2. Provare che g ha in $x = 0$ un punto di massimo relativo.

Domanda facoltativa

Si dimostri che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\arctan(ty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutta la retta reale.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30