Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2015/2016
Primo appello

Esercizi senza svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + xy\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Indicare:

1. i punti critici di f;
2. gli eventuali punti di minimo relativo di f;
3. gli eventuali punti di massimo relativo di f;
4. gli eventuali punti di sella di f.

Risposte

1. $(0,0)$, $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, -1/2)$;
2. $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, -1/2)$;
3. nessuno;
4. $(0,0)$;

Esercizio 2

Sia dato il circuito di equazione polare

$$\rho = \cos\vartheta\,, \qquad \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

Indicare:

1. l'equazione della retta tangente alla curva nel punto di coordinate cartesiane $(1/2, 1/2)$;
2. la lunghezza della curva;
3. l'area della regione di piano delimitata dalla curva.

Risposte

1. $y = 1/2$;
2. π;
3. $\pi/4$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 2

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Indicare:

1. i punti critici di f;
2. gli eventuali punti di minimo relativo di f;
3. gli eventuali punti di massimo relativo di f;
4. gli eventuali punti di sella di f.

Risposte

1. $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$;
2. $(-1,1)$, $(1,-1)$;
3. nessuno;
4. $(0,0)$.

Esercizio 2

Sia dato il circuito di equazione polare

$$\rho = \operatorname{sen}\vartheta\,, \qquad \vartheta \in [0,\pi]\,.$$

Indicare:

1. l'equazione della retta tangente alla curva nel punto di coordinate cartesiane $(-1/2, 1/2)$;
2. la lunghezza della curva;
3. l'area della regione di piano delimitata dalla curva.

Risposte

1. $x = -1/2$;
2. π;
3. $\pi/4$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 3

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x,y) = xy - x^4 - y^4\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Indicare:

1. i punti critici di f;
2. gli eventuali punti di minimo relativo di f;
3. gli eventuali punti di massimo relativo di f;
4. gli eventuali punti di sella di f.

Risposte

1. $(0,0)$, $(1/2,1/2)$, $(-1/2,-1/2)$;
2. nessuno;
3. $(1/2,1/2)$, $(-1/2,-1/2)$;
4. $(0,0)$.

Esercizio 2

Sia dato il circuito di equazione polare

$$\rho = -2\cos\vartheta\,, \qquad \vartheta \in [\pi/2, 3\pi/2]\,.$$

Indicare:

1. l'equazione della retta tangente alla curva nel punto di coordinate cartesiane $(-1,-1)$;
2. la lunghezza della curva;
3. l'area della regione di piano delimitata dalla curva.

Risposte

1. $y = -1$;
2. 2π;
3. π.

Esercizi senza svolgimento - Tema 4

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Indicare:

1. i punti critici di f;
2. gli eventuali punti di minimo relativo di f;
3. gli eventuali punti di massimo relativo di f;
4. gli eventuali punti di sella di f.

Risposte

1. $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$;
2. nessuno;
3. $(1,1)$, $(-1,-1)$;
4. $(0,0)$.

Esercizio 2

Sia dato il circuito di equazione polare

$$\rho = -2\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,, \qquad \vartheta \in [\pi, 2\pi]\,.$$

Indicare:

1. l'equazione della retta tangente alla curva nel punto di coordinate cartesiane $(1,-1)$;
2. la lunghezza della curva;
3. l'area della regione di piano delimitata dalla curva.

Risposte

1. $x = 1$;
2. 2π;
3. π.

Esercizi con svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{2x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Determinare se la funzione è continua in $(0,0)$.
2. Determinare se la funzione è derivabile in $(0,0)$.
3. Determinare se la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento

1. Si ha

$$0 \leq \left| \frac{|x|y}{\sqrt{2x^2+y^2}} \right| \leq \sqrt{|xy|}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}} \to 0 = f(0,0)$$

per $(x,y) \to (0,0)$, da cui la continuità di f. Altrimenti, passando in coordinate polari si ha

$$|f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)| = \rho^2 \frac{|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta|}{\rho\sqrt{2\cos^2\vartheta + \mathrm{sen}^2\,\vartheta}} \leq \rho|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta| \leq \rho \doteq \varphi(\rho)\,,$$

con $\varphi(\rho) \to 0$ per $\rho \to 0$, e quindi $f(x,y)$ ha limite $f(0,0) = 0$ per $(x,y) \to (0,0)$.

2. Si ha

$$\begin{aligned} f(x,0) = 0 \quad \forall x \quad &\Longrightarrow \quad \partial_x f(0,0) = 0\,, \\ f(0,y) = 0 \quad \forall y \quad &\Longrightarrow \quad \partial_y f(0,0) = 0\,, \end{aligned}$$

e quindi f è derivabile in $(0,0)$ con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

3. Affinché f sia differenziabile in $(0,0)$ deve valere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y}{\sqrt{2x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Prendendo la restrizione di f lungo la retta $y = x$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|x}{\sqrt{3x^2}\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|x}{\sqrt{6}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{6}x}\,,$$

che non esiste, e quindi f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2

Sia dato l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\right\},$$

e sia γ la curva percorsa una volta in senso antiorario, se vista dall'alto, e il cui sostegno è

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + 3y^2\,,\ z = 8 - x^2 - y^2\right\}.$$

1. Calcolare il volume di Ω.

2. Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + x^2y)\mathbf{i} + (y - xy^2 - 3z^2y)\mathbf{j} + (z + z^3)\mathbf{k}\,,$$
calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso $\partial\Omega$.
3. Calcolare la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo γ.

Svolgimento

1. L'insieme Ω è quello compreso tra i due paraboloidi in figura 1.

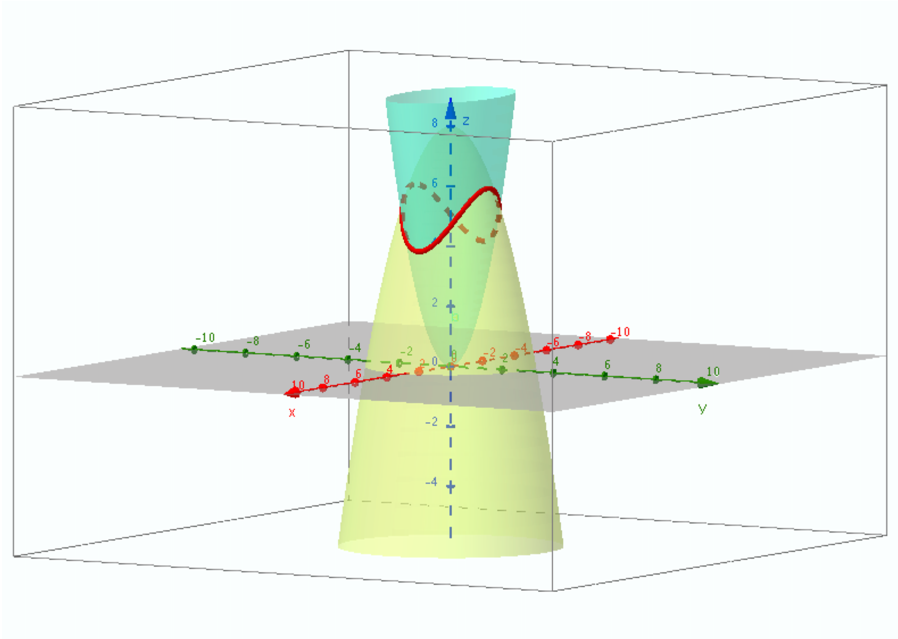

Figura 1: L'insieme Ω ed il sostegno Γ di γ (in rosso).

Poiché
$$x^2 + 3y^2 \le 8 - x^2 - y^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 2y^2 \le 4\,,$$
posto
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 4\right\}, \tag{1}$$
integrando per fili si ottiene
$$|\Omega|_3 = \iint_D \left(\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\right) dxdy = \iint_D (8 - 2x^2 - 4y^2)\,dxdy\,.$$
Con il cambio di variabili
$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta\,, \\ y = (\rho/\sqrt{2})\operatorname{sen}\vartheta\,, \end{cases} \tag{2}$$
si ha
$$\begin{aligned} |\Omega|_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (8 - 2\rho^2)\rho\,d\rho d\vartheta = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho\,d\rho \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}}(\rho^2 - 4)^2\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} = \frac{16}{\sqrt{2}}\pi\,. \end{aligned}$$

2. Per il teorema della divergenza
$$\Phi(\mathbf{F};\partial\Omega) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydz\,.$$
Poiché $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 3$, si ottiene
$$\Phi(\mathbf{F};\partial\Omega) = 3|\Omega|_3 = \frac{48}{\sqrt{2}}\pi\,.$$

3. Sia
$$\Sigma = \big\{(x,y,z) : z = x^2 + 3y^2\,, (x,y) \in D\big\}\,,$$
con D definito come in (1), orientata con versore normale avente terza componente non negativa. Allora $\partial^+\Sigma = \Gamma$, cosicché dal teorema del rotore
$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \Phi(\operatorname{rot}\mathbf{F};\Sigma) = \iint_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS\,.$$
Parametrizzando Σ come una superficie cartesiana
$$\mathbf{r}(x,y) = (x,y,x^2+3y^2)\,, \qquad (x,y)\in D\,,$$
da cui
$$\partial_x\mathbf{r}\times\partial_y\mathbf{r} = (-2x,-6y,1)\,,$$
e poiché
$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+x^2y & y-xy^2-3z^2y & z+z^3 \end{pmatrix} \\ &= 6zy\,\mathbf{i} + (-y^2-x^2)\,\mathbf{k}\,,\end{aligned}$$
si ottiene
$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_D (-12x^2y - x^2 - y^2)\,dxdy\,.$$
Una volta osservato che
$$\iint_D xyz\,dxdy = 0$$
per ragioni di simmetria (la funzione integranda è dispari nelle variabili x e y e il dominio D è simmetrico rispetto agli assi $x=0$ e $y=0$), e sfruttando il cambio di variabili (2) si ha
$$\begin{aligned}\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{[0,2]\times[0,2\pi]}\left(\rho^3\cos^2\vartheta + \frac{\rho^3}{2}\operatorname{sen}^2\vartheta\right)d\rho d\vartheta \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{[0,2]\times[0,2\pi]}\frac{\rho^3}{2}(1+\cos^2\vartheta)\,d\rho d\vartheta \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int_0^2\rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\vartheta)\,d\vartheta\right) = -3\sqrt{2}\pi\,.\end{aligned}$$