Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2015/2016

Secondo appello

Esercizi senza svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Siano dati il campo vettoriale conservativo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + 3z^2\right)\mathbf{k}, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0),$$

il circuito $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = \big(1+\cos^2(\pi t), t + \operatorname{sen}(\pi t), t\big), \qquad t \in [0,1],$$

e la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1,\ x^2+y^2 < 4,\ x \geq 0,\ -x < y < x\big\},$$

orientata con normale avente terza componente positiva.
Indicare:

1. un potenziale U di $\mathbf{F}$;
2. il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ;
3. il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Risposte

1. $U(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2) + z^3$;
2. $\ln 6 - \ln 4 + 1$;
3. $\dfrac{\pi}{2}(\ln 5 + 6)$.

Svolgimento punto 3

Per agevolare la lettura, calcoliamo il flusso di cui al punto 3. La superficie Σ è parametrizzabile con

$$\mathbf{r}(x,y) = (x,y,1), \qquad (x,y) \in D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4,\ x \geq 0,\ -x < y < x\big\},$$

perché Σ è un quarto di cerchio posto sul piano $z = 1$ parallelo al piano xy. La normale è evidentemente $\mathbf{k}$. Allora

$$\Phi(\mathbf{F};\Sigma) = \iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = \iint_D \left(\frac{2}{x^2+y^2+1} + 3\right) dxdy = 3\pi + \iint_{[0,2]\times[-\pi/4,\pi/4]} \frac{2\rho}{1+\rho^2}\,d\rho d\vartheta$$

$$= 3\pi + \frac{\pi}{2}\ln(1+\rho^2)\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} = \frac{\pi}{2}(\ln 5 + 6),$$

dove per il calcolo dell'integrale doppio sono state utilizzate le coordinate polari.

Esercizio 2

Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Indicare:

1. gli intervalli massimali nei quali $\mathbf{W}$ è matrice wronskiana di un sistema lineare del primo ordine
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,;$$

2. la matrice $A(t)$;

3. la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \\ x(1/2) = 1\,, \quad y(1/2) = 0\,. \end{cases}$$

Risposte

1. $]-\infty,-1[,\ ]-1,0[,\ ]0,1[,\ ]1,+\infty[$;

2. $A(t) = \dfrac{1}{t^2(1-t^2)} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ -t^2 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-2t^2}{t(1-t^2)} & \dfrac{1}{1-t^2} \\ \dfrac{1}{1-t^2} & \dfrac{1-2t^2}{t(1-t^2)} \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{3}t - \dfrac{4}{3}t^2 + t\ln(2t) \\ \dfrac{8}{3}t^2 - \dfrac{4}{3}t + t^2\ln(2t) \end{pmatrix}.$

Svolgimento punto 3

Anche in questo caso, per agevolare la lettura, calcoliamo la soluzione di cui al punto 3. Con il metodo della variazione delle costanti si trova che una soluzione particolare del sistema non omogeneo è data da

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \mathbf{W}(t) \int_{1/2}^{t} [\mathbf{W}(s)]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} ds = \mathbf{W}(t) \int_{1/2}^{t} \frac{1}{s^2(1-s^2)} \begin{pmatrix} s & -s^2 \\ -s^2 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} ds \\
&= \mathbf{W}(t) \int_{1/2}^{t} \begin{pmatrix} 1/s \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(2t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\ln(2t) \\ t^2\ln(2t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'integrale generale del sistema non omogeneo è

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 t^2 + t\ln(2t) \\ c_1 t^2 + c_2 t + t^2 \ln(2t) \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova $c_1 = 8/3$ e $c_2 = -4/3$, e quindi la soluzione cercata.

Esercizi senza svolgimento - Tema 2

Esercizio 1

Siano dati il campo vettoriale conservativo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + 3x^2\right)\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}\,, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)\,,$$

il circuito $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = \big(1 - \operatorname{sen}^2(\pi t), 2t + \cos(\pi t), 2t + 2\big)\,, \qquad t \in [-1/2, 1/2]\,,$$

e la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\,,\ y^2 + z^2 < 16\,,\ z \geq |y|\big\}\,,$$

orientata con normale avente prima componente positiva.
Indicare:

1. un potenziale U di $\mathbf{F}$;
2. il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ;
3. il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Risposte

1. $U(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2) + x^3$;
2. $\ln 10 - \ln 2$;
3. $\dfrac{\pi}{2}(\ln 17 + 24)$.

Esercizio 2

Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Indicare:

1. gli intervalli massimali nei quali $\mathbf{W}$ è matrice wronskiana di un sistema lineare del primo ordine
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,;$$
2. la matrice $A(t)$;
3. la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \\ x(1/2) = 1\,, \quad y(1/2) = 0\,. \end{cases}$$

Risposte

1. $]-\infty,-1[,\ ]-1,0[,\ ]0,1[,\ ]1,+\infty[$;

2. $A(t)=\dfrac{1}{t^2(t^2-1)}\begin{pmatrix}2t & 1\\ 1 & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^2 & -t\\ -t & t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2t^2-1}{t(t^2-1)} & -\dfrac{1}{t^2-1}\\ -\dfrac{1}{t^2-1} & \dfrac{2t^2-1}{t(t^2-1)}\end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{3}t^2+\dfrac{8}{3}t+t^2\ln(2t)\\ -\dfrac{4}{3}t+\dfrac{8}{3}t^2+t\ln(2t)\end{pmatrix}$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 3

Esercizio 1

Siano dati il campo vettoriale conservativo

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i}+\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}+3y^2\right)\mathbf{j}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}\,,\qquad (x,y,z)\neq(0,0,0)\,,$$

il circuito $\gamma=(\mathbf{r},\Gamma)$ parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t)=\big(2t+2,2t+\cos(\pi t),1-\operatorname{sen}^2(\pi t)\big)\,,\qquad t\in[-1/2,1/2]\,,$$

e la superficie

$$\Sigma=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=1\,,\ x^2+z^2<9\,,\ x\leq 0\,,\ x<z<-x\big\}\,,$$

orientata con normale avente seconda componente positiva.
Indicare:

1. un potenziale U di $\mathbf{F}$;
2. il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ;
3. il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Risposte

1. $U(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)+y^3$;
2. $\ln 10-\ln 2+2$;
3. $\dfrac{\pi}{2}\left(\ln 10+\dfrac{27}{2}\right)$.

Esercizio 2

Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t)=\begin{pmatrix}t^2 & t^3\\ t^3 & t\end{pmatrix}\,,\qquad t\in\mathbb{R}\,.$$

Indicare:

1. gli intervalli massimali nei quali $\mathbf{W}$ è matrice wronskiana di un sistema lineare del primo ordine
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ;$$

2. la matrice $A(t)$;

3. la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x(1/2) = 0 \,, \quad y(1/2) = 1 \,. \end{cases}$$

Risposte

1. $]-\infty, 0[,\ ]0, 1[,\ ]1, +\infty[$;

2. $A(t) = \dfrac{1}{t^3(1-t^3)} \begin{pmatrix} 2t & 3t^2 \\ 3t^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -t^3 \\ -t^3 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2-3t^3}{t(1-t^3)} & \dfrac{t}{1-t^3} \\ \dfrac{2}{1-t^3} & \dfrac{1-3t^3}{t(1-t^3)} \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{7}t^2 + \frac{16}{7}t^3 + t^3 \ln(2t) \\ -\frac{8}{7}t^3 + \frac{16}{7}t + t \ln(2t) \end{pmatrix}$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 4

Esercizio 1

Siano dati il campo vettoriale conservativo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + 3x^2 \right) \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \mathbf{j} + \left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} - 3z^2 \right) \mathbf{k} \,, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \,,$$

il circuito $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = \big(t + \operatorname{sen}(\pi t), 1 + \cos^2(\pi t), t\big) \,, \qquad t \in [0,1] \,,$$

e la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 \,,\ x^2 + z^2 < 4 \,,\ x \geq 0 \,,\ -x < z < x \big\} \,,$$

orientata con normale avente seconda componente positiva.
Indicare:

1. un potenziale U di $\mathbf{F}$;

2. il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ;

3. il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Risposte

1. $U(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + x^3 - z^3$;
2. $\ln 6 - \ln 4$;
3. $\dfrac{\pi}{2} \ln 5$.

Esercizio 2

Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Indicare:

1. gli intervalli massimali nei quali $\mathbf{W}$ è matrice wronskiana di un sistema lineare del primo ordine
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ;$$
2. la matrice $A(t)$;
3. la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \\ x(1/2) = 0\,, \quad y(1/2) = 1\,. \end{cases}$$

Risposte

1. $]-\infty, 0[,\ ]0, 1[,\ ]1, +\infty[$;
2. $A(t) = \dfrac{1}{t^3(1-t)} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 2t & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \\ -t^2 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-2t}{t(1-t)} & \dfrac{1}{t(1-t)} \\ 0 & \dfrac{2}{t} \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t + 8t^2 + t^2 \ln(2t) \\ 4t^2 + t^2 \ln(2t) \end{pmatrix}$.

Esercizi con svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Sia data la curva di equazione polare

$$\rho = e^{2\vartheta}\,, \qquad \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

1. Scrivere una parametrizzazione della curva e calcolarne la lunghezza.
2. Calcolare l'ascissa del centroide.
3. Calcolare l'ordinata del centroide.

Svolgimento

1. Sfruttando le formule per passare dalle coordinate polari alle cartesiane

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta\,, \end{cases}$$

si ottiene la parametrizzazione

$$\mathbf{r}(\vartheta) = \left(e^{2\vartheta}\cos\vartheta, e^{2\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\right), \qquad \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

Per quanto riguarda la lunghezza, detta γ la curva così parametrizzata, si ha

$$\ell(\gamma) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\mathbf{r}'(\vartheta)\|\, d\vartheta = \sqrt{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi})\,.$$

2. L'ascissa x_C del centroide è data da

$$x_C = \frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma x\, ds = \frac{2}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta$$

Poiché vale

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta &= e^{4\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta \\ &= e^{2\pi} + e^{-2\pi} + 4\left[e^{4\vartheta}\cos\vartheta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta\right] \qquad (1) \\ &= e^{2\pi} + e^{-2\pi} - 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta\,,\end{aligned}$$

si ottiene

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{17}\,,$$

da cui

$$x_C = \frac{2}{17}\cdot\frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\,.$$

3. Da (1) si ricava

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{4}\left[e^{2\pi} + e^{-2\pi} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta\right] = \frac{4}{17}(e^{2\pi} + e^{-2\pi})\,,$$

e quindi l'ordinata y_C del centroide è

$$y_C = \frac{1}{\ell(\gamma)}\int_\gamma y\, ds = \frac{2}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta = \frac{8}{17}\cdot\frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\,.$$

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2) + z^2\,, \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0)\,.$$

1. Provare che in un intorno di $(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2})$ l'equazione $f(x,y,z) = 1 + e/2$ definisce implicitamente una funzione $z = g(x,y)$.
2. Calcolare le derivate parziali di g in $(\sqrt{e/2}, 0)$
3. Sia ora
$$\Gamma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 1\Big\}\,.$$
Calcolare massimo e minimo in Γ della funzione $\varphi(x,y,z) = x$.
N.B.: si dia per scontata l'esistenza di massimo e minimo.

Svolgimento

1. Poiché f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e valgono
$$f(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2}) = 1 + e/2\,, \qquad \partial_z f(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2}) = \frac{2\sqrt{e/2}}{e} + 2\sqrt{e/2} \neq 0\,,$$
il teorema di Dini[1] assicura l'esistenza di g.
2. Sempre dal teorema di Dini si ha
$$\partial_x g(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2}) = -\frac{\partial_x f(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2})}{\partial_z f(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2})} = -\frac{1}{1+e}\,,$$
$$\partial_y g(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2}) = -\frac{\partial_y f(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2})}{\partial_z f(\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2})} = 0\,.$$
3. Innanzitutto osserviamo che Γ è un vincolo regolare. Infatti
$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \\ f(x,y,z) = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2} = 0 \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2} = 0 \\ \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2} + 2z = 0 \\ \ln(x^2+y^2+z^2) + z^2 = 1\,, \end{cases}$$
che non ha soluzioni. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene
$$\begin{cases} 1 - \dfrac{2\lambda x}{x^2+y^2+z^2} = 0 \\ -\dfrac{2\lambda y}{x^2+y^2+z^2} = 0 \\ -\dfrac{2\lambda z}{x^2+y^2+z^2} - 2\lambda z = 0 \\ \ln(x^2+y^2+z^2) + z^2 = 1\,. \end{cases}$$

[1] L'enunciato del teorema di Dini non deve trarre in inganno. Il fatto che il teorema consideri l'equazione $f(x,y,z) = 0$ non fa perdere di generalità all'enunciato, che continua a valere anche considerando l'equazione $f(x,y,z) = 1+e/2$, che può essere riscritta come $f(x,y,z) - 1 - e/2 = 0$. Le condizioni da verificare in tal caso sono $f(x_0,y_0,z_0) = 1+e/2$ e $\partial_z f(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, con $(x_0,y_0,z_0) = (\sqrt{e/2}, 0, \sqrt{e/2})$.

La seconda equazione implica $\lambda = 0$ o $y = 0$, ma $\lambda = 0$ sostituita nella prima fornisce $1 = 0$, che è falsa. Allora necessariamente $\lambda \neq 0$ e $y = 0$, cosicché dalla terza equazione si ricava $z = 0$. La quarta equazione diventa $\ln x^2 = 1$, che è risolta per $x = \pm\sqrt{e}$, e poi dalla prima si ricava il valore del moltiplicatore λ corrispondente. Quindi i punti critici vincolati di φ sono $(\sqrt{e}, 0, 0)$ e $(-\sqrt{e}, 0, 0)$: il primo è di massimo con $\varphi(\sqrt{e}, 0, 0) = \sqrt{e}$, il secondo di minimo con $\varphi(-\sqrt{e}, 0, 0) = -\sqrt{e}$.