Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2015/2016

Terzo appello

Esercizi senza svolgimento

Esercizio 1

Siano dati i campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{x^2} + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^{z^2}\mathbf{k}\,, \quad \mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + (y + \cos x)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} y - x)\mathbf{j}\,.$$

il circuito $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 0\big)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,,$$

Indicare:

1. se $\mathbf{F}$ è conservativo;
2. se $\mathbf{G}$ è conservativo;
3. il valore della circuitazione di $\mathbf{G}$ lungo γ.

Risposte

1. Sì;
2. no;
3. -2π.

Svolgimento punto 3

Per agevolare la lettura, calcoliamo il flusso di cui al punto 3. Poiché $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{G} = \operatorname{rot}\big[(y + \cos x)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} y - x)\mathbf{j}\big] = -2\mathbf{k}\,.$$

Sia

$$\Sigma = \big\{(x,y,0) : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$$

orientata con normale $\mathbf{k}$, cosicché il bordo orientato di Σ è esattamente γ. Allora per il teorema del rotore

$$\oint_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{G} \cdot \mathbf{k}\, dS = -2|\Sigma| = -2\pi\,.$$

Esercizio 2

Sia dato l'integrale

$$\iint_D x(x^2 + y)e^{x^2 - y}\, dxdy\,,$$

dove

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y \leq 2\,,\ 3 \leq x^2 - y \leq 4\,,\ x \geq 0\big\}\,.$$

Indicare:

1. un opportuno cambio di variabili che trasforma D in un rettangolo;
2. il determinante della matrice jacobiana della trasformazione di coordinate di cui al punto precedente;
3. il valore dell'integrale dato.

Risposte

1. $\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = x^2 - y \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u+v}{2}} \\ y = \dfrac{u-v}{2}\,; \end{cases}$
2. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{u+v}}$;
3. $\dfrac{3}{8}(e^4 - e^3)$.

Svolgimento punto 3

Anche in questo caso, per agevolare la lettura, calcoliamo la soluzione di cui al punto 3. Con il cambio di variabili dato si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_D x(x^2+y)e^{x^2-y}\,dxdy &= \iint_{[1,2]\times[3,4]} \sqrt{\frac{u+v}{2}}ue^v \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{u+v}}\,dudv \\ &= \frac{1}{4}\left(\int_1^2 u\,du\right)\left(\int_3^4 e^v\,dv\right) = \frac{3}{8}(e^4-e^3)\,.\end{aligned}$$

Esercizi con svolgimento

Esercizio 1

Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}\,. \qquad (*)$$

1. Calcolare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo associato.
2. Calcolare l'integrale generale di $(*)$.
3. Calcolare la soluzione di $(*)$ tale che $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.

Svolgimento

1. Gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$ di rispettivi autovettori

   $$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

   Allora una matrice wronskiana del sistema omogeneo è

   $$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{4t} \\ -e^t & 2e^{4t} \end{pmatrix}\,,$$

e quindi l'integrale generale cercato è

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{4t} \\ y(t) = -c_1 e^t + 2c_2 e^{4t}, \end{cases}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Una soluzione particolare del sistema non omogeneo è data da

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t) \int_0^t [\mathbf{W}(s)]^{(-1)} \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} ds .$$

Poiché

$$[\mathbf{W}(t)]^{(-1)} = \frac{1}{3e^{5t}} \begin{pmatrix} 2e^{4t} & -e^{4t} \\ e^t & e^t \end{pmatrix},$$

si ottiene

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t) \int_0^t \frac{1}{3e^{5s}} \begin{pmatrix} 2e^{4s} & -e^{4s} \\ e^s & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} ds = \frac{1}{3}\mathbf{W}(t) \int_0^t \begin{pmatrix} 3se^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} ds$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & e^{4t} \\ -e^t & 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - te^{-t} - e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t - t - 1 \\ -e^t + t + 1 \end{pmatrix}.$$

L'integrale generale cercato è

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{v}(t), \qquad \begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{4t} + e^t - t - 1 \\ y(t) = -c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} - e^t + t + 1, \end{cases}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. Imponendo le condizioni iniziali nell'integrale generale appena trovato si ottiene

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y(t) = -c_1 + 2c_2 = 1, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_1 = \frac{1}{3}, \ c_2 = \frac{2}{3}.$$

La soluzione cercata è

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} + e^t - t - 1 \\ y(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{4}{3}e^{4t} - e^t + t + 1, \end{cases}$$

Esercizio 2

Siano dati la funzione

$$f(x,y,z) = (x+y)z(z-4) + 2x^2 + 2y^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R},$$

e l'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq z \leq 4\}.$$

1. Dimostrare che f ha massimo e minimo in D.

2. Trovare gli eventuali punti critici di f interni a D e studiarne la natura.

3. Calcolare massimo e minimo di f in D.

Svolgimento

1. f è funzione continua. D è chiuso perché le funzioni $g_1(x,y,z) = x^2+y^2$ e $g_2(x,y,z) = z$ sono continue. Inoltre è limitato perché se $(x,y,z) \in D$, allora $z \in [0,4]$, $|x|, |y| \le 2$. Si conclude utilizzando il teorema di Wierstrass.

2. L'interno di D è l'insieme

$$D^\circ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 4\,,\ 0 < z < 4\right\}.$$

Calcoliamo i punti critici di f. Deve essere

$$\begin{cases} \partial_x f = z(z-4) + 4x = 0 \\ \partial_y f = z(z-4) + 4y = 0 \\ \partial_z f = (x+y)(2z-4) = 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} z(z-4) + 4x = 0 \\ y = x \\ 2x(2z-4) = 0\,, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione interna a D il punto $(1,1,2)$. Calcoliamo la matrice hessiana di f in $(1,1,2)$. Si ha

$$\partial^2_{xx} f = 4\,, \qquad \partial^2_{yy} f = 4\,, \qquad \partial^2_{zz} f = 2(x+y)\,,$$
$$\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f = 0\,, \qquad \partial^2_{xz} f = \partial^2_{zx} f = (2z-4)\,, \qquad \partial^2_{yz} f = \partial^2_{zy} f = (2z-4)\,,$$

da cui

$$H_f(1,1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\,,$$

che è matrice definita positiva. Se ne deduce che $(1,1,2)$ è punto di minimo locale per f, con $f(1,1,2) = -4$

3. Cerchiamo ora eventuali punti di massimo e minimo di f sulla frontiera di D. Si osservi che $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 4\,,\ z = 0 \text{ o } z = 4\right\}$$
$$\Gamma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4\,,\ 0 < z < 4\right\}.$$

Se $(x,y,z) \in \Gamma_1$, si ha $f(x,y,z) = 2(x^2+y^2)$, ed essendo $x^2+y^2 \le 4$ si ottiene

$$\min_{(x,y,z)\in\Gamma_1} f(x,y,z) = 0\,, \qquad \max_{(x,y,z)\in\Gamma_1} f(x,y,z) = 8\,.$$

Per calcolare eventuali punti di massimo e minimo in Γ_2, sfruttiamo il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, dopo aver osservato che, se $(x,y,z) \in \Gamma_2$, allora

$$f(x,y,z) = (x+y)z(z-4) + 8\,,$$

essendo $x^2+y^2 = 4$. Poiché Γ_2 è superficie regolare, come si verifica facilmente, deve essere

$$\begin{cases} z(z-4) - 2\lambda x = 0 \\ z(z-4) - 2\lambda y = 0 \\ (x+y)(2z-4) = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \\ 0 < z < 4\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} z(z-4) - 2\lambda x = 0 \\ \lambda(y-x) = 0 \\ (x+y)(2z-4) = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \\ 0 < z < 4\,. \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, la prima equazione diventa $z(z-4) = 0$, che non ha soluzioni in Γ_2 perché deve essere $0 < z < 4$. Allora il sistema diventa

$$\begin{cases} z(z-4) - 2\lambda x = 0 \\ y = x \\ 2x(2z-4) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ 0 < z < 4\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} z(z-4) - 2\lambda x = 0 \\ y = x \\ 2x(2z-4) = 0 \\ x^2 = 2 \\ 0 < z < 4\,. \end{cases}$$

Si trovano i punti critici vincolati $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$, con λ di conseguenza. In tali punti si ha

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) = 8(1 - \sqrt{2})\,, \qquad f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2) = 8(1 + \sqrt{2})\,.$$

Poiché $8(1 + \sqrt{2}) > 8$ e $8(1 - \sqrt{2}) > -4$, si ottiene che

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = f(1,1,2) = -4\,, \qquad \max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2) = 8(1 + \sqrt{2})\,.$$