Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2015/2016

Quarto appello

Esercizi senza svolgimento

Esercizio 1

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' - 7y' + 6y = e^{2t}\,. \tag{$*$}$$

Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
2. l'integrale generale di $(*)$;
3. la soluzione di $(*)$ che soddisfa $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{6t}$;
2. $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{6t} - \dfrac{1}{4} e^{2t}$;
3. $y(t) = \dfrac{6}{5} e^t + \dfrac{1}{20} e^{6t} - \dfrac{1}{4} e^{2t}$.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2y^2 + x^2 - y^2\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Indicare:

1. i punti critici di f;
2. gli eventuali punti di minimo relativo;
3. gli eventuali punti di massimo relativo;
4. gli eventuali punti di sella.

Risposte

1. $(0,0)$, $(0,2/3)$, $(1/4,3/4)$, $(-1/4,3/4)$;
2. $(0,2/3)$;
3. la funzione non ha punti di massimo relativo;
4. $(0,0)$, $(1/4,3/4)$, $(-1/4,3/4)$.

Esercizi con svolgimento

Esercizio 1

Sia dato l'insieme
$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 2,\ x^2 + y^2 \le z \le 2\}\,.$$

1. Disegnare D.
2. Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_D (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz\,.$$
3. Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, yz^2, 1)\,,$$
dopo aver verificato che div $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 + z^2$, calcolare il flusso di F attraverso la porzione della frontiera di D data dalla superficie
$$\Sigma = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 2,\ z = x^2 + y^2\right\},$$
orientata in modo che in $(0, 0, 0)$ la normale sia $-\mathbf{k}$.

Svolgimento

1. L'insieme D è rappresentato in figura 1: è la porzione di spazio interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ (in rosso), compresa fra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ (in verde) e il piano di equazione $z = 2$ (in azzurro).

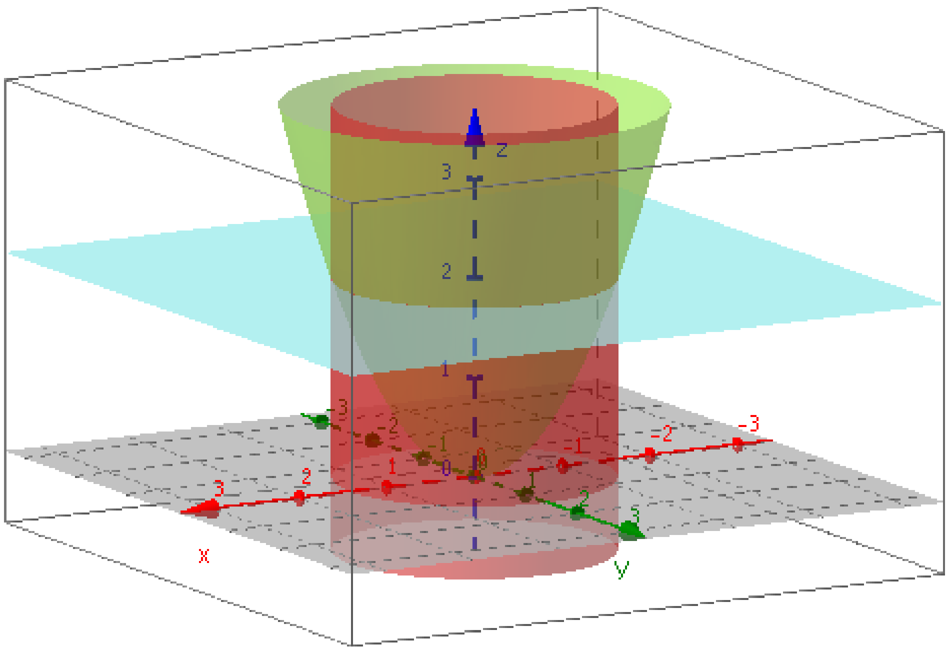

Figura 1: L'insieme D.

2. Passando in coordinate cilindriche si ottiene

$$\begin{aligned}
\iiint_D (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{\rho^2}^{2} \big(\rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + z^2\big)\rho\,d\rho d\vartheta dz \\
&= \left(\int_0^{\sqrt{2}} (2-\rho^2)\rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\vartheta\,d\vartheta\right) + 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\rho^2}^{2} \rho z^2\,d\rho dz \\
&= \pi\left[\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{3}\int_0^{\sqrt{2}} \big(8-\rho^6\big)\rho\,d\rho \\
&= \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\left[4\rho^2 - \frac{\rho^8}{8}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{14}{3}\pi\,.
\end{aligned}$$

3. Orientata ∂D con normale esterna, e detta Σ_2 la porzione di ∂D sul piano $z=2$ orientata con normale $\mathbf{k}$, si ha, grazie al teorema della divergenza,

$$\Phi(\mathbf{F};\partial D) = \Phi(\mathbf{F};\Sigma) + \Phi(\mathbf{F};\Sigma_2) = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz = \frac{14}{3}\pi\,.$$

Si ottiene

$$\Phi(\mathbf{F};\Sigma) = \frac{14}{3}\pi - \Phi(\mathbf{F};\Sigma_2) = \frac{14}{3}\pi - \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = \frac{14}{3}\pi - |\Sigma_2| = \frac{14}{3}\pi - 2\pi = \frac{8}{3}\pi\,.$$

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y,z) = \arctan(x^2+y^2) + x^3 + y^2\,, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2\,.$$

1. Provare che in un intorno di $(0,1)$ l'equazione $f(x,y) = 1+\pi/4$ definisce implicitamente una funzione $y=g(x)$.
2. Provare che g ha in $x=0$ un punto di massimo relativo.

Svolgimento

1. Si ha

$$f(0,1) = \arctan 1 + 1 = \frac{\pi}{4}+1\,.$$

Inoltre

$$\partial_y f(x,y) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} + 2y \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_y f(0,1) = 3 \neq 0\,.$$

2. Calcoliamo le derivate prime e seconde di f in $(0,1)$ risperro ad x. Si ottiene

$$\partial_x f(0,1) = 0\,, \quad \partial^2_{xx} f(0,1) = 1\,.$$

Calcoliamo derivate prima e seconda di g in $x=0$. Si ottiene

$$g'(0) = -\frac{\partial_x f(0,1)}{\partial_y f(0,1)} = 0\,, \quad g''(0) = -\frac{\partial^2_{xx} f(0,1)}{\partial_y f(0,1)} = -\frac{1}{3} < 0\,,$$

e quindi g ha in $x=0$ un punto di massimo relativo, come si voleva.