Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IAS-IM, 15/02/17

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 1 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2(1-t^3) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

con $A(t)$ matrice 2×2 a coeffcienti continui.

1. Calcolare $A(t)$ in modo che
$$W(t) = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ t^2 & t \end{pmatrix}$$
sia matrice risolvente del sistema lineare associato a $(*)$.
2. Determinare l'integrale generale di $(*)$ nell'intervallo $]1, +\infty[$, con $A(t)$ come al punto precedente.
3. Determinare la soluzione di $(*)$ tale che $x(2) = 0$ e $y(2) = 1$.

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati l'insieme

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/9 + y^2 + z^2/4 \le 1\,,\ -1 \le z \le 1\right\},$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/9 + y^2 + z^2/4 = 1\,,\ -1 < z < 1\right\},$$

orientata in modo che la normale nel punto $(3, 0, 0)$ sia $\mathbf{i}$.

1. Disegnare D.
2. Calcolare
$$\iiint_D (y^2 + z^2)\, dxdydz\,.$$
3. Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + 3xz^2)\,\mathbf{i} + (y^3 + xz)\,\mathbf{j} + (xy + z^2)\,\mathbf{k}\,,$$
calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Domanda facoltativa

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\partial_y f(x, y) = 0\,, \quad \partial_x f(x, y) < 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \le 0\right\}.$$

Le condizioni date sono sufficienti per affermare l'esistenza di punti di massimo e minimo assoluti per f in D? In caso affermativo, é possibile dire quali sono tali punti? Giustificare le risposte.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IAS-IM, 15/02/17

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 2 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^3(t-1) \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

con $A(t)$ matrice 2×2 a coeffcienti continui.

1. Calcolare $A(t)$ in modo che
$$W(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t^3 & t \end{pmatrix}$$
sia matrice risolvente del sistema lineare associato a $(*)$.
2. Determinare l'integrale generale di $(*)$ nell'intervallo $]1, +\infty[$, con $A(t)$ come al punto precedente.
3. Determinare la soluzione di $(*)$ tale che $x(2) = 1$ e $y(2) = 0$.

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati l'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/9 + y^2/4 + z^2 \leq 1\,,\ -1/2 \leq z \leq 1/2\}\,,$$

e la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/9 + y^2/4 + z^2 = 1\,,\ -1/2 < z < 1/2\}\,,$$

orientata in modo che la normale nel punto $(3, 0, 0)$ sia $\mathbf{i}$.

1. Disegnare D.
2. Calcolare
$$\iiint_D (x^2 + y^2)\, dxdydz\,.$$
3. Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y^4)\,\mathbf{i} + (y^3 + z)\,\mathbf{j} + (x + y)z\,\mathbf{k}\,,$$
calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Domanda facoltativa

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\partial_y f(x, y) = 0\,, \quad \partial_x f(x, y) < 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Si consideri l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}\,.$$

Le condizioni date sono sufficienti per affermare l'esistenza di punti di massimo e minimo assoluti per f in D? In caso affermativo, é possibile dire quali sono tali punti? Giustificare le risposte.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IAS-IM, 15/02/17

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 3 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^4(1-t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

con $A(t)$ matrice 2×2 a coeffcienti continui.

1. Calcolare $A(t)$ in modo che
$$W(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t^3 \\ t & t^3 \end{pmatrix}$$
sia matrice risolvente del sistema lineare associato a $(*)$.
2. Determinare l'integrale generale di $(*)$ nell'intervallo $]1, +\infty[$, con $A(t)$ come al punto precedente.
3. Determinare la soluzione di $(*)$ tale che $x(2) = 0$ e $y(2) = 1$.

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati l'insieme

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2/9 + z^2/4 \leq 1\,,\ -\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}\right\},$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2/9 + z^2/4 = 1\,,\ -\sqrt{2} < z < \sqrt{2}\right\},$$

orientata in modo che la normale nel punto $(1, 0, 0)$ sia $\mathbf{i}$.

1. Disegnare D.
2. Calcolare
$$\iiint_D (x^2 + z^2)\, dxdydz\,.$$
3. Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^3 + z^2)\,\mathbf{i} + (6yz^2 + x)\,\mathbf{j} + (xyz + 1)\,\mathbf{k}\,,$$
calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Domanda facoltativa

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\partial_y f(x, y) = 0\,, \quad \partial_x f(x, y) < 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 0\right\}.$$

Le condizioni date sono sufficienti per affermare l'esistenza di punti di massimo e minimo assoluti per f in D? In caso affermativo, é possibile dire quali sono tali punti? Giustificare le risposte.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IAS-IM, 15/02/17

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 4 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2(t^2-1) \end{pmatrix} , \qquad (*)$$

con $A(t)$ matrice 2×2 a coeffcienti continui.

1. Calcolare $A(t)$ in modo che
$$W(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$
sia matrice risolvente del sistema lineare associato a $(*)$.
2. Determinare l'integrale generale di $(*)$ nell'intervallo $]1, +\infty[$, con $A(t)$ come al punto precedente.
3. Determinare la soluzione di $(*)$ tale che $x(2) = 1$ e $y(2) = 0$.

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati l'insieme

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/4 + y^2/9 + z^2 \leq 1 \,,\ -\sqrt{2}/2 \leq z \leq \sqrt{2}/2 \right\} ,$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1 \,,\ -\sqrt{2}/2 < z < \sqrt{2}/2 \right\} ,$$

orientata in modo che la normale nel punto $(2, 0, 0)$ sia $\mathbf{i}$.

1. Disegnare D.
2. Calcolare
$$\iiint_D (2y^2 + z^2) \, dxdydz \, .$$
3. Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy^2 + z^2) \, \mathbf{i} + (xz + yz^2) \, \mathbf{j} + (1 + xz + yz) \, \mathbf{k} \, ,$$
calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Domanda facoltativa

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\partial_y f(x, y) = 0 \,, \quad \partial_x f(x, y) < 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, .$$

Si consideri l'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 0 \right\} .$$

Le condizioni date sono sufficienti per affermare l'esistenza di punti di massimo e minimo assoluti per f in D? In caso affermativo, é possibile dire quali sono tali punti? Giustificare le risposte.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30