Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 03/07/17

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare o di qualsiasi dispositivo in grado di connettersi ad internet, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 1 - Esercizi con svolgimento

Esercizio 1 [7 punti]

Siano dati l'insieme

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 9z^2 \leq 36\,,\ z \geq -1\}$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + 2xz)\,\mathbf{i} + (2y^2 + yx)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

1. Disegnare Ω.
2. Calcolare le coordinate del centroide di Ω.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 9z^2 = 36\,,\ z \geq -1\}$$

orientata in modo che nel punto $(0,0,2)$ il versore normale sia $\mathbf{k}$.

Esercizio 2 [5 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x||y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.

1. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è continua in $(0,0)$.
2. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.
3. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Domanda facoltativa

Si dimostri che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \arctan(ty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutta la retta reale.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 03/07/17

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare o di qualsiasi dispositivo in grado di connettersi ad internet, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 2 - Esercizi con svolgimento

Esercizio 1 [7 punti]

Siano dati l'insieme

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 + z^2 \le 9\,,\ z \le 2\}$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + 2x)\,\mathbf{i} + (3y - 2yz)\,\mathbf{j} + (zy - z)\,\mathbf{k}\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

1. Disegnare Ω.
2. Calcolare le coordinate del centroide di Ω.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 9\,,\ z \le 2\}$$

orientata in modo che nel punto $(0,0,-3)$ il versore normale sia $-\mathbf{k}$.

Esercizio 2 [5 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{1/2}|y|^{\alpha}}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.

1. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è continua in $(0,0)$.
2. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.
3. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Domanda facoltativa

Si dimostri che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \arctan(ty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutta la retta reale.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 03/07/17

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare o di qualsiasi dispositivo in grado di connettersi ad internet, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 3 - Esercizi con svolgimento

Esercizio 1 [7 punti]

Siano dati l'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2 + 9y^2 + 16z^2 \leq 64\,,\ z \leq 1\right\}$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + xy)\,\mathbf{i} + (y^2 + yz)\,\mathbf{j} + (z^2 + 2z)\,\mathbf{k}\,, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

1. Disegnare Ω.
2. Calcolare le coordinate del centroide di Ω.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 64\,,\ z \leq 1\right\}$$

orientata in modo che nel punto $(0, 0, -2)$ il versore normale sia $-\mathbf{k}$.

Esercizio 2 [5 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2\alpha}|y|}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.

1. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è continua in $(0, 0)$.
2. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è derivabile in $(0, 0)$.
3. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è differenziabile in $(0, 0)$.

Domanda facoltativa

Si dimostri che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \arctan(ty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutta la retta reale.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 03/07/17

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Il solo possesso di un telefono cellulare o di qualsiasi dispositivo in grado di connettersi ad internet, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 4 - Esercizi con svolgimento

Esercizio 1 [7 punti]

Siano dati l'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 36\,,\ z \geq -2\}$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + xz)\,\mathbf{i} + (y^2 + yx)\,\mathbf{j} + (zy - 2z)\,\mathbf{k}\,, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

1. Disegnare Ω.
2. Calcolare le coordinate del centroide di Ω.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 36\,,\ z \geq -2\}$$

   orientata in modo che nel punto $(0, 0, 3)$ il versore normale sia $\mathbf{k}$.

Esercizio 2 [5 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2\alpha}|y|^{1/2}}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$$

con $\alpha > 0$.

1. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è continua in $(0, 0)$.
2. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è derivabile in $(0, 0)$.
3. Determinare per quali $\alpha > 0$ la funzione è differenziabile in $(0, 0)$.

Domanda facoltativa

Si dimostri che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \arctan(ty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione che è definita su tutta la retta reale.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30