Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2016/2017
Primo appello

Esercizi senza svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Sia
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\ z \geq 0\right\}.$$
Indicare:

1. un cambio di coordinate che trasforma Ω in un parallelepipedo;
2. il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana del cambio di coordinate di cui al punto precedente;
3. il volume di Ω;
4. le coordinate del centroide di Ω.

Risposte

1. $\begin{cases} x = (\rho/2)\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta\,, \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\,, \\ z = \rho\cos\varphi\,, \end{cases} \qquad \rho \in [0,1]\,,\ \varphi \in [0,\pi/2]\,,\ \vartheta \in [0,2\pi]\,;$
2. $(\rho^2/2)\operatorname{sen}\varphi$;
3. $\pi/3$;
4. $(0,0,3/8)$;

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale
$$y'' - 5y' + 25y = e^{5t}\,. \tag{$*$}$$
Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a $(*)$;
2. l'integrale generale dell'equazione differenziale $(*)$.

Risposte

1. $y(t) = c_1e^{5t/2}\cos(\sqrt{75}t/2) + c_2e^{5t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{75}t/2)$;
2. $y(t) = c_1e^{5t/2}\cos(\sqrt{75}t/2) + c_2e^{5t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{75}t/2) + \dfrac{1}{25}e^{5t}$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 2

Esercizio 1

Sia

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 9y^2 + z^2 \le 1\,,\ z \ge 0\right\}.$$

Indicare:

1. un cambio di coordinate che trasforma Ω in un parallelepipedo;
2. il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana del cambio di coordinate di cui al punto precedente;
3. il volume di Ω;
4. le coordinate del centroide di Ω.

Risposte

1. $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta\,, \\ y = (\rho/3) \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta\,, \\ z = \rho\cos\varphi\,, \end{cases} \qquad \rho \in [0, 1]\,,\ \varphi \in [0, \pi/2]\,,\ \vartheta \in [0, 2\pi]\,;$
2. $(\rho^2/3) \operatorname{sen}\varphi$;
3. $2\pi/9$;
4. $(0, 0, 3/8)$;

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}\,. \tag{$*$}$$

Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a $(*)$;
2. l'integrale generale dell'equazione differenziale $(*)$.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$;
2. $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \dfrac{t^2}{2} e^{2t}$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 3

Esercizio 1

Sia
$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 \le 1\,,\ z \le 0\right\}.$$
Indicare:

1. un cambio di coordinate che trasforma Ω in un parallelepipedo;
2. il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana del cambio di coordinate di cui al punto precedente;
3. il volume di Ω;
4. le coordinate del centroide di Ω.

Risposte

1. $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta\,, \\ y = (\rho/2) \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta\,, \\ z = \rho\cos\varphi\,, \end{cases} \qquad \rho \in [0,1]\,,\ \varphi \in [\pi/2, \pi]\,,\ \vartheta \in [0, 2\pi]\,;$
2. $(\rho^2/2) \operatorname{sen}\varphi$;
3. $\pi/3$;
4. $(0, 0, -3/8)$;

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale
$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3t}\,. \qquad (*)$$
Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a $(*)$;
2. l'integrale generale dell'equazione differenziale $(*)$.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$;
2. $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} + \dfrac{t^2}{2} e^{-3t}$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 4

Esercizio 1

Sia
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\ z \leq 0\}\,.$$

Indicare:

1. un cambio di coordinate che trasforma Ω in un parallelepipedo;
2. il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana del cambio di coordinate di cui al punto precedente;
3. il volume di Ω;
4. le coordinate del centroide di Ω.

Risposte

1. $$\begin{cases} x = (\rho/3)\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta\,, \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\,, \\ z = \rho\cos\varphi\,, \end{cases} \qquad \rho \in [0,1]\,,\ \varphi \in [\pi/2, \pi]\,,\ \vartheta \in [0, 2\pi]\,;$$
2. $(\rho^2/3)\operatorname{sen}\varphi$;
3. $2\pi/9$;
4. $(0, 0, -3/8)$;

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale
$$y'' + 8y' + 16y = e^{-4t}\,. \tag{$*$}$$

Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a $(*)$;
2. l'integrale generale dell'equazione differenziale $(*)$.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$;
2. $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t} + \dfrac{t^2}{2} e^{-4t}$.

Esercizi con svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big[2(x^2+y^2-x)(2x-1)-2x\big]\,\mathbf{i} + 2y(2x^2+2y^2-2x-1)\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}\,, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,.$$

1. Dimostrare che $\mathbf{F}$ è conservativo.
2. Verificare che
$$U(x,y,z) = (x^2+y^2-x)^2 - x^2 - y^2 + z^2$$
è un potenziale U di $\mathbf{F}$.

Sia ora
$$\Gamma = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : U(x,y,z)=0\,,\ z=0\big\}\,.$$

3. Trovare gli eventuali punti singolari di Γ.
4. Trovare i punti di Γ di coordinata x massima.

Svolgimento

1. Il campo vettoriale è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ che è insieme semplicemente connesso. Inoltre
$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ 2(x^2+y^2-x)(2x-1)-2x & 2y(2x^2+2y^2-2x-1) & 2z\end{pmatrix}\\ &= \big[\partial_x\big(2y(2x^2+2y^2-2x-1)\big) - \partial_y\big(2(x^2+y^2-x)(2x-1)-2x\big)\big]\,\mathbf{k} = (0,0,0)\,,\end{aligned}$$
come si verifica facilmente.

2. Si verifica facilmente che
$$\begin{cases}\partial_x U(x,y,z) = 2(x^2+y^2-x)(2x-1)-2x\\ \partial_y U(x,y,z) = 2y(2x^2+2y^2-2x-1)\\ \partial_z U(x,y,z) = 2z\,,\end{cases}$$
da cui la conclusione.

3. Bisogna trovare i punti di Γ per i quali la matrice che ha per righe il gradiente di U e quello della funzione $g(x,y,z)=z$ ha rango minore di 2. Si trova che sono tutti e soli i punti le cui coordinate sono soluzione del sistema
$$\begin{cases}2(x^2+y^2-x)(2x-1)-2x=0\\ 2y(2x^2+2y^2-2x-1)=0\\ (x^2+y^2-x)^2-x^2-y^2+z^2=0\\ z=0\end{cases} \iff \begin{cases}2(x^2+y^2-x)(2x-1)-2x=0\\ 2y(2x^2+2y^2-2x-1)=0\\ (x^2+y^2-x)^2-x^2-y^2=0\\ z=0\,.\end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che deve essere $y = 0$ oppure $2x^2 + 2y^2 - 2x - 1 = 0$. Se $y = 0$, si ha

$$\begin{cases} 2(x^2 - x)(2x - 1) - 2x = 0 \\ y = 0 \\ (x^2 - x)^2 - x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x^2 + y^2 - x)(2x - 1) - 2x = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x = 2 \\ z = 0\,, \end{cases}$$

da cui si ricava $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Se, invece, $2x^2 + 2y^2 - 2x - 1 = 0$, si ottiene

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2 - x)(2x - 1) - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 1/2 \\ (x^2 + y^2 - x)^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ z = 0\,, \end{cases}$$

da cui, sostituendo $1/2$ al posto di $x^2 + y^2 - x$ nella prima equazione, $-1 = 0$, che è falsa. Quindi l'unico punto singolare di Γ è $(0, 0, 0)$.

4. Si tratta di trovare il punto di massimo di $f(x, y, z) = x$ vincolato a Γ. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, bisogna trovare i punti diversi da $(0, 0, 0)$ le cui coordinate sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} 1 - \lambda\big[2(x^2 + y^2 - x)(2x - 1) - 2x\big] = 0 \\ -2\lambda y(2x^2 + 2y^2 - 2x - 1) = 0 \\ -2\lambda z - \mu = 0 \\ (x^2 + y^2 - x)^2 - x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima e dalla terza equazione si ricava $\mu = z = 0$, e quindi ci si riconduce a trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1 - \lambda\big[2(x^2 + y^2 - x)(2x - 1) - 2x\big] = 0 \\ -2\lambda y(2x^2 + 2y^2 - 2x - 1) = 0 \\ (x^2 + y^2 - x)^2 - x^2 - y^2 = 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo

$$\lambda = 0 \quad \text{o} \quad y = 0 \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 - x = 1/2\,.$$

$\lambda = 0$ possiamo escluderlo grazie alla prima equazione. Se $y = 0$, il sistema diventa

$$\begin{cases} 1 - \lambda\big[2(x^2 - x)(2x - 1) - 2x\big] = 0 \\ y = 0 \\ (x^2 - x)^2 - x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \lambda\big[2(x^2 - x)(2x - 1) - 2x\big] = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x = 2\,, \end{cases}$$

da cui la soluzione $(2,0,0)$ con $\lambda = 1/8$. Se $x^2+y^2-x = 1/2$, il sistema diventa

$$\begin{cases} 1-\lambda\big[2(x^2+y^2-x)(2x-1)-2x\big]=0 \\ x^2+y^2-x=1/2 \\ (x^2+y^2-x)^2-x^2-y^2=0\,. \end{cases} \iff \begin{cases} 1+\lambda=0 \\ x^2+y^2-x=1/2 \\ x^2+y^2=1/4\,, \end{cases}$$

da cui $(x,y,z) = (-1/4, \pm\sqrt{3}/4, 0)$. Allora il punto cercato è $(2,0,0)$.

Esercizio 2

Sia $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ la curva semplice parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (1+\cos t)\cos t\,\mathbf{i} - (1+\cos t)\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

1. Provare che γ è chiusa e regolare a tratti.
2. Calcolare la lunghezza di γ
3. Calcolare l'area della regione del piano xy racchiusa dalla curva γ.
4. Calcolare la circuitazione del campo vettoriale

   $$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) - 2y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

   lungo γ, dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale dell'esercizio 1.

Svolgimento

1. Si ha $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi) = (2,0)$, e quindi γ è chiusa. Inoltre

   $$\mathbf{r}'(t) = \big(-\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(2t)\big)\,\mathbf{i} - \big(\cos t + \cos(2t)\big)\,\mathbf{j}\,,$$

   da cui $\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = 2(1+\cos t)$. Allora $\mathbf{r}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ se e solo se $t = \pi$, da cui la regolarità a tratti di γ.

2. Si ha

   $$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\,dt = 2\int_0^{2\pi}|\cos(t/2)|\,dt = 4\int_0^{\pi}|\cos s|\,ds = 8\,.$$

3. Detta Σ la regione di cui dobbiamo calcolare l'area e una volta notato che γ è percorsa in senso orario se guardata dall'alto, si ha

   $$\begin{aligned}|\Sigma|_2 &= -\int_\gamma x\,dy = \int_0^{2\pi}\big[(1+\cos t)\cos t\big(\cos t + \cos(2t)\big)\big]\,dt = 2\int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(1+\cos(2t)\big)^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(1+\cos^2(2t)\big)\,dt = \frac{3}{2}\pi\,.\end{aligned}$$

4. Si noti che

   $$\operatorname{rot}\mathbf{G}(x,y,z) = \operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) + 3\,\mathbf{k} = 3\,\mathbf{k}\,.$$

   Detta Σ la superficie del piano xy racchiusa da γ e orientata con normale $\mathbf{k}$, tenuto conto dell'orientazione di γ, grazie al teorema del rotore si ottiene

   $$\oint_\gamma \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = -\Phi(\operatorname{rot}\mathbf{G};\Sigma) = -3|\Sigma|_2 = -\frac{9}{2}\pi\,.$$