Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2016/2017
Secondo appello

Esercizi senza svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

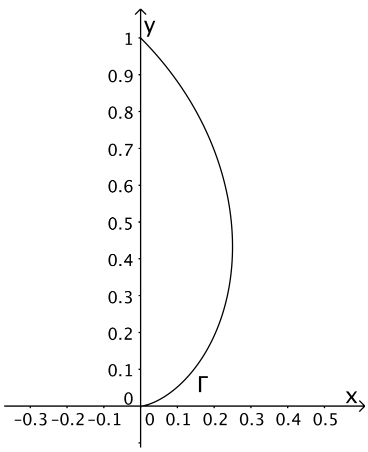

Figura 1: Il sostegno Γ

Sia data la curva piana $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ di equazione polare

$$\rho = 1 - \cos\vartheta\,, \qquad \vartheta \in [0, \pi/2]\,,$$

dove $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione canonica associata all'equazione polare e il sostegno Γ è rappresentato in figura. Sia dato inoltre il campo vettoriale conservativo

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(2x + e^{x\cos y}\cos y\big)\,\mathbf{i} + \big(1 - xe^{x\cos y}\,\mathrm{sen}\, y\big)\,\mathbf{j}.$$

Indicare:

1. la lunghezza di γ;
2. l'area della regione di piano compresa fra il sostegno di γ e l'asse delle ordinate;
3. un potenziale di $\mathbf{F}$;
4. il valore del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ.

Risposte

1. $2(2-\sqrt{2})$;
2. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\pi - 2\right)$;
3. $U(x,y) = x^2 + y + e^{x\cos y}$;
4. 1.

Esercizio 2

Sia data la funzione definita da

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 8x^2 - 3y^2\,.$$

Indicare:

1. i punti critici di f;
2. gli eventuali punti di massimo relativo di f;
3. gli eventuali punti di minimo relativo di f;
4. gli eventuali punti di sella di f.

Risposte

1. $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(-2,0)$, $(-2,2)$;
2. $(0,0)$;
3. $(2,2)$, $(-2,2)$;
4. $(0,2)$, $(2,0)$, $(-2,0)$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 2

Esercizio 1

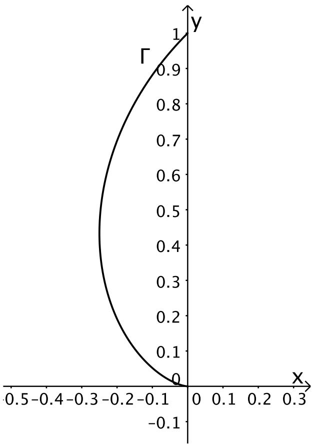

Figura 2: Il sostegno Γ

Sia data la curva piana $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ di equazione polare

$$\rho = 1 + \cos\vartheta\,, \qquad \vartheta \in [\pi/2, \pi]\,,$$

dove $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione canonica associata all'equazione polare e il sostegno Γ è rappresentato in figura. Sia dato inoltre il campo vettoriale conservativo

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(1 - ye^{y\cos x}\operatorname{sen} x\big)\,\mathbf{i} + \big(2y + e^{y\cos x}\cos x\big)\,\mathbf{j}.$$

Indicare:

1. la lunghezza di γ;
2. l'area della regione di piano compresa fra il sostegno di γ e l'asse delle ordinate;
3. un potenziale di $\mathbf{F}$;
4. il valore del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ.

Risposte

1. $2(2-\sqrt{2})$;
2. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\pi - 2\right)$;
3. $U(x,y) = x + y^2 + e^{y\cos x}$;
4. $-e$.

Esercizio 2

Sia data la funzione definita da

$$f(x,y) = x^3 + y^4 - 3x^2 - 8y^2\,.$$

Indicare:

1. i punti critici di f;
2. gli eventuali punti di massimo relativo di f;
3. gli eventuali punti di minimo relativo di f;
4. gli eventuali punti di sella di f.

Risposte

1. $(0,0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(2,-2)$;
2. $(0,0)$;
3. $(2,2)$, $(2,-2)$;
4. $(0,2)$, $(0,-2)$, $(2,0)$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 3

Esercizio 1

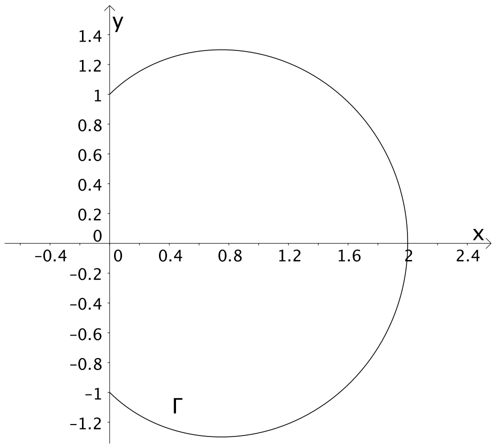

Figura 3: Il sostegno Γ

Sia data la curva piana $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ di equazione polare

$$\rho = 1 + \cos\vartheta\,, \qquad \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]\,,$$

dove $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione canonica associata all'equazione polare e il sostegno Γ è rappresentato in figura. Sia dato inoltre il campo vettoriale conservativo

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(2x + e^{x \operatorname{sen} y} \operatorname{sen} y\big)\,\mathbf{i} + \big(2 + x e^{x \operatorname{sen} y} \cos y\big)\,\mathbf{j}.$$

Indicare:

1. la lunghezza di γ;
2. l'area della regione di piano compresa fra il sostegno di γ e l'asse delle ordinate;
3. un potenziale di $\mathbf{F}$;
4. il valore del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ.

Risposte

1. $4\sqrt{2}$;
2. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\pi + 4\right)$;
3. $U(x,y) = x^2 + 2y + e^{x \operatorname{sen} y}$;
4. 4.

Esercizio 2

Sia data la funzione definita da

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 8x^2 + 3y^2\,.$$

Indicare:

1. i punti critici di f;
2. gli eventuali punti di massimo relativo di f;
3. gli eventuali punti di minimo relativo di f;
4. gli eventuali punti di sella di f.

Risposte

1. $(0,0)$, $(0,-2)$, $(2,0)$, $(2,-2)$, $(-2,0)$, $(-2,-2)$;
2. $(0,-2)$;
3. $(2,0)$, $(-2,0)$;
4. $(0,0)$, $(2,-2)$, $(-2,-2)$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 4

Esercizio 1

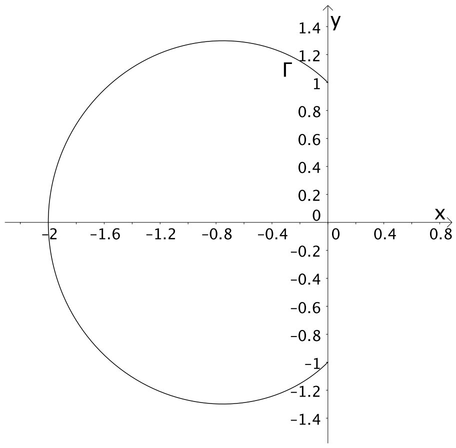

Figura 4: Il sostegno Γ

Sia data la curva piana $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ di equazione polare

$$\rho = 1 - \cos\vartheta \,, \qquad \vartheta \in [\pi/2, 3\pi/2] \,,$$

dove $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione canonica associata all'equazione polare e il sostegno Γ è rappresentato in figura. Sia dato inoltre il campo vettoriale conservativo

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(2 + ye^{y \operatorname{sen} x} \cos x\big)\, \mathbf{i} + \big(2y + e^{y \operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x\big)\, \mathbf{j}.$$

Indicare:

1. la lunghezza di γ;
2. l'area della regione di piano compresa fra il sostegno di γ e l'asse delle ordinate;
3. un potenziale di $\mathbf{F}$;
4. il valore del lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ.

Risposte

1. $4\sqrt{2}$;
2. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\pi + 4\right)$;
3. $U(x,y) = 2x + y^2 + e^{y \operatorname{sen} x}$;
4. 0.

Esercizio 2

Sia data la funzione definita da

$$f(x,y) = x^3 - y^4 + 3x^2 + 8y^2 \,.$$

Indicare:

1. i punti critici di f;
2. gli eventuali punti di massimo relativo di f;
3. gli eventuali punti di minimo relativo di f;
4. gli eventuali punti di sella di f.

Risposte

1. $(0,0)$, $(0,-2)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$;
2. $(-2,2)$, $(-2,-2)$;
3. $(0,0)$;
4. $(0,-2)$, $(0,2)$, $(-2,0)$.

Esercizi con svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2(1-t^3) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

con $A(t)$ matrice 2×2 a coeffcienti continui.

1. Calcolare $A(t)$ in modo che
$$W(t) = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ t^2 & t \end{pmatrix}$$
sia matrice risolvente del sistema lineare associato a (1).
2. Determinare l'integrale generale di (1) nell'intervallo $]1, +\infty[$, con $A(t)$ come al punto precedente.
3. Determinare la soluzione di (1) tale che $x(2) = 0$ e $y(2) = 1$.

Svolgimento

1. Si ha
$$A(t) = W'(t)(W(t))^{-1} = \frac{1}{t^2 - t^5} \begin{pmatrix} 1 & 3t^2 \\ 2t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -t^3 \\ -t^2 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3t^3-1}{t^4-t} & -\dfrac{2t}{t^3-1} \\ -\dfrac{1}{t^3-1} & \dfrac{2t^3-1}{t^4-t} \end{pmatrix}.$$
2. Una soluzione particolare si scrive
$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= W(t) \int_2^t (W(s))^{-1} \begin{pmatrix} s^2(1-s^3) \\ 0 \end{pmatrix} ds = W(t) \int_2^t \frac{1}{s^2 - s^5} \begin{pmatrix} s & -s^3 \\ -s^2 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2(1-s^3) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= W(t) \int_2^t \begin{pmatrix} s \\ -s^2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t & t^3 \\ t^2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t^2-4)/2 \\ (8-t^3)/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{6}(2t^6 - 19t^3 + 12t) \\ \dfrac{1}{6}(t^4 - 12t^2 + 16t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
L'integrale generale è
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = W(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 t^3 - \dfrac{1}{6}(2t^6 - 19t^3 + 12t) \\ c_1 t^2 + c_2 t + \dfrac{1}{6}(t^4 - 12t^2 + 16t) \end{pmatrix},$$
con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
3. Dall'integrale generale si ricava che
$$\begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 8c_2 \\ 4c_1 + 2c_2 \end{pmatrix},$$
da cui, imponendo le condizioni iniziali,
$$\begin{cases} 2c_1 + 8c_2 = 0 \\ 4c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -4c_2 \\ -14c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 2/7 \\ c_2 = -1/14\,. \end{cases}$$
La soluzione cercata è
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{7}t - \dfrac{1}{14}t^3 - \dfrac{1}{6}(2t^6 - 19t^3 + 12t) \\ \dfrac{2}{7}t^2 - \dfrac{1}{14}t + \dfrac{1}{6}(t^4 - 12t^2 + 16t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3}t^6 + \dfrac{65}{21}t^3 - \dfrac{12}{7}t \\ \dfrac{1}{6}t^4 - \dfrac{12}{7}t^2 + \dfrac{109}{42}t \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

Siano dati l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/9 + y^2 + z^2/4 \leq 1\,,\ -1 \leq z \leq 1\right\},$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/9 + y^2 + z^2/4 = 1\,,\ -1 < z < 1\right\},$$

orientata in modo che la normale nel punto $(3,0,0)$ sia $\mathbf{i}$.

1. Disegnare D.
2. Calcolare
$$\iiint_D (y^2+z^2)\,dxdydz\,.$$
3. Dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+3xz^2)\,\mathbf{i} + (y^3+xz)\,\mathbf{j} + (xy+z^2)\,\mathbf{k}\,,$$
calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

Svolgimento

1. L'insieme D è rappresentato in figura 5. D è la porzione di spazio contenuta nell'elissoide di equazione $x^2/9 + y^2 + z^2/4 = 1$ (in rosso) e compresa fra i piani di equazione $z = -1$ e $z = 1$ (in azzurro).

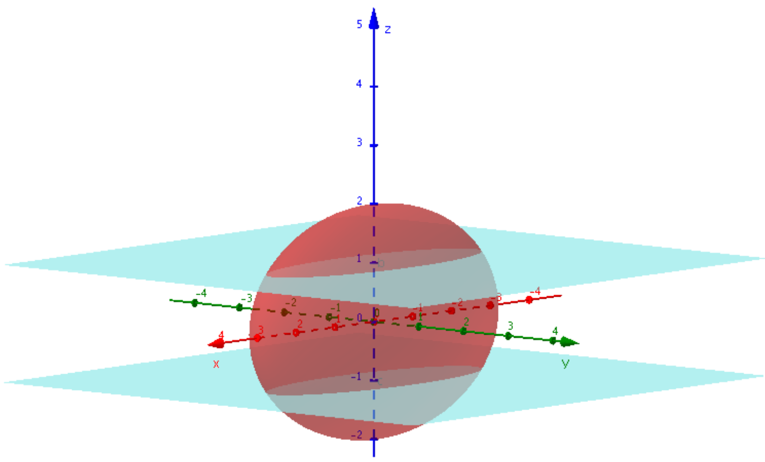

Figura 5: L'insieme D.

2. Facciamo il cambio di variabili
$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \geq 0\,,\ \vartheta \in [0,2\pi]\,,\ z \in \mathbb{R}$$
cosicché D nelle nuove coordinate diventa
$$D' = \left\{(\rho,\vartheta,z) : \rho^2 + z^2/4 \leq 1\,,\ \rho \geq 0\,, \vartheta \in [0,2\pi]\,,\ z \in [-1,1]\right\},$$

mentre il determinante della matrice jacobiana della trasformazione è 3ρ, come si verifica facilmente. Essendo D' un insieme ρ-semplice (si vede facilmente che $0 \le \rho \le \sqrt{1 - z^2/4}$), integrando per fili si ottiene

$$\iiint_D (y^2 + z^2)\, dxdydz = \iiint_{D'} \big(\rho^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta + z^2\big) 3\rho\, d\rho d\vartheta dz$$
$$= 3 \iint_{[0,2\pi]\times[-1,1]} \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2/4}} \big(\rho^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta + z^2\big)\rho\, d\rho \right) d\vartheta dz$$

Si ottiene

$$\iint_{[0,2\pi]\times[-1,1]} \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2/4}} \rho^3 \operatorname{sen}^2 \vartheta\, d\rho \right) d\vartheta dz = \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^2 dz \right) \left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \vartheta\, d\vartheta \right)$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{16}\right) dz = \frac{203}{480}\pi\,,$$

$$\iint_{[0,2\pi]\times[-1,1]} \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2/4}} \rho z^2\, d\rho \right) d\vartheta dz = 2\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{z^2}{4}\right) z^2\, dz = \frac{17}{30}\pi\,.$$

Allora

$$\iiint_D (y^2 + z^2)\, dxdydz = 3 \left(\frac{203}{480} + \frac{17}{30} \right) \pi = \frac{95}{32}\pi\,.$$

3. Si osservi che

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 2x + z^2 + 3y^2 + 2z = 3(y^2 + z^2) + 2x + 2z\,.$$

Se orientiamo ∂D con la normale esterna otteniamo

$$\Phi(\mathbf{F}; \partial D) = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dxdydz = 3 \iiint_D (y^2 + z^2)\, dxdydz + 2 \iiint_D (x + z)\, dxdydz = \frac{285}{32}\pi\,,$$

essendo

$$\iiint_D (x + z)\, dxdydz = 0$$

per ragioni di simmetria. Si osservi che $\partial D = \Sigma \cup \Sigma_{-1} \cup \Sigma_1$, dove

$$\Sigma_{-1} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/9 + y^2 \le 3/4\,,\ z = -1\big\}\,, \quad \Sigma_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/9 + y^2 \le 3/4\,,\ z = 1\big\}\,,$$

con Σ_{-1} orientata con normale $-\mathbf{k}$ e Σ_1 orientata con normale $\mathbf{k}$. Allora

$$\Phi(\mathbf{F}; \Sigma) = \Phi(\mathbf{F}; \partial D) - \Phi(\mathbf{F}; \Sigma_{-1}) - \Phi(\mathbf{F}; \Sigma_1)\,.$$

Detta Ω la regione del piano xy contenuta nell'ellisse di equazione $x^2/9 + y^2 \le 3/4$,

$$\Omega = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/9 + y^2 \le 3/4\big\}\,,$$

si ottiene

$$\Phi(\mathbf{F}; \Sigma_{-1}) = -\iint_\Omega \mathbf{F}(x, y, -1) \cdot \mathbf{k}\, dxdy = -\iint_\Omega (xy + 1)\, dxdy = -|\Omega|\,,$$

essendo

$$\iint_\Omega xy\, dxdy = 0$$

per ragioni di simmetria. Analogamente

$$\Phi(\mathbf{F}; \Sigma_1) = \iint_\Omega \mathbf{F}(x, y, 1) \cdot \mathbf{k}\, dxdy = \iint_\Omega (xy + 1)\, dxdy = |\Omega|\,.$$

Allora

$$\Phi(\mathbf{F}; \Sigma_{-1}) + \Phi(\mathbf{F}; \Sigma_1) = 0\,,$$

e quindi $\Phi(\mathbf{F}; \Sigma) = \Phi(\mathbf{F}; \partial D) = 285\pi/32$.