Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2016/2017
Terzo appello

Esercizi senza svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Siano dati la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^3 - x^2 + y^2$$

e l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Indicare:

1. i punti critici di f interni a D;
2. la natura dei punti critici di f interni a D;
3. i punti critici di f vincolati a ∂D;
4. i punti di massimo e minimo assoluti di f in D.

Risposte

1. $(2/3, 0)$, $(0, 0)$;
2. $(2/3, 0)$ è punto di minimo, $(0, 0)$ è punto di sella;
3. $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$;
4. $(-1, 0)$ è punto di minimo, $(0, \pm 1)$ sono punti di massimo.

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}, \qquad t > 0. \tag{$*$}$$

Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a $(*)$;
2. l'integrale generale di $(*)$;
3. la soluzione di $(*)$ che soddisfa $y(1) = 0$, $y'(1) = 2e$.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$;
2. $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + t e^t \ln t$;
3. $y(t) = -e^t + t e^t + t e^t \ln t$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 2

Esercizio 1

Siano dati la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = y^3 - y^2 + x^2$$

e l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + x^2 \leq 1\right\}.$$

Indicare:

1. i punti critici di f interni a D;
2. la natura dei punti critici di f interni a D;
3. i punti critici di f vincolati a ∂D;
4. i punti di massimo e minimo assoluti di f in D.

Risposte

1. $(0, 2/3)$, $(0, 0)$;
2. $(0, 2/3)$ è punto di minimo, $(0, 0)$ è punto di sella;
3. $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$;
4. $(0, -1)$ è punto di minimo, $(\pm 1, 0)$ sono punti di massimo.

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2t}}{t}, \qquad t > 0. \tag{$*$}$$

Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a $(*)$;
2. l'integrale generale di $(*)$;
3. la soluzione di $(*)$ che soddisfa $y(1) = e^2$, $y'(1) = 0$.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$;
2. $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + t e^{2t} \ln t$;
3. $y(t) = 4e^{2t} - 3te^{2t} + te^{2t} \ln t$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 3

Esercizio 1

Siano dati la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2$$

e l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Indicare:

1. i punti critici di f interni a D;
2. la natura dei punti critici di f interni a D;
3. i punti critici di f vincolati a ∂D;
4. i punti di massimo e minimo assoluti di f in D.

Risposte

1. $(-2/3, 0)$, $(0, 0)$;
2. $(-2/3, 0)$ è punto di massimo, $(0, 0)$ è punto di sella;
3. $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$;
4. $(1, 0)$ è punto di massimo, $(0, \pm 1)$ sono punti di minimo.

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = -\frac{e^{-t}}{t}, \qquad t > 0. \tag{$*$}$$

Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a $(*)$;
2. l'integrale generale di $(*)$;
3. la soluzione di $(*)$ che soddisfa $y(1) = 0$, $y'(1) = -2/e$.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$;
2. $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} - t e^{-t} \ln t$;
3. $y(t) = e^{-t} - t e^{-t} - t e^{-t} \ln t$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 4

Esercizio 1

Siano dati la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = y^3 + y^2 - x^2$$

e l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 \leq 1\right\}.$$

Indicare:

1. i punti critici di f interni a D;
2. la natura dei punti critici di f interni a D;
3. i punti critici di f vincolati a ∂D;
4. i punti di massimo e minimo assoluti di f in D.

Risposte

1. $(0,-2/3)$, $(0,0)$;
2. $(0,-2/3)$ è punto di massimo, $(0,0)$ è punto di sella;
3. $(\pm 1, 0)$, $(0,\pm 1)$;
4. $(0,1)$ è punto di massimo, $(\pm 1, 0)$ sono punti di minimo.

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 4y = -\frac{e^{-2t}}{t}, \qquad t > 0. \tag{$*$}$$

Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a $(*)$;
2. l'integrale generale di $(*)$;
3. la soluzione di $(*)$ che soddisfa $y(1) = -1/e^2$, $y'(1) = 0$.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$;
2. $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} - t e^{-2t} \ln t$;
3. $y(t) = -t e^{-2t} - t e^{-2t} \ln t$;

Esercizi con svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Siano dati l'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 9z^2 \leq 36\,,\ z \geq -1\right\}$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + 2xz)\,\mathbf{i} + (2y^2 + yx)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

1. Disegnare Ω.
2. Calcolare le coordinate del centroide di Ω.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

   $$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 9z^2 = 36\,,\ z \geq -1\right\}$$

   orientata in modo che nel punto $(0, 0, 2)$ il versore normale sia $\mathbf{k}$.

Svolgimento

1. L'insieme Ω è rappresentato in figura 1. Ω è la porzione di spazio contenuta nell'elissoide di equazione $x^2 + y^2 + 9z^2 = 36$ (in verde) e che sta sopra il piano di equazione $z = -1$ (in blu; in nero è la circonferenza intersezione tra l'elissoide ed il piano).

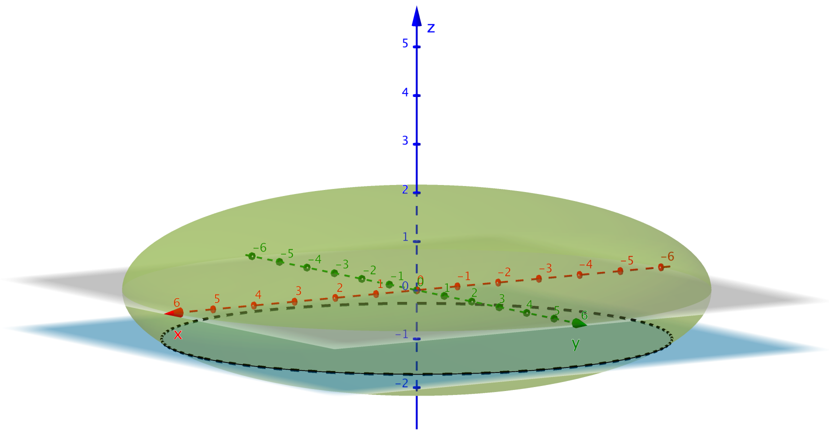

Figura 1: L'insieme Ω.

2. Dette (x_c, y_c, z_c) le coordinate cercate, per evidenti ragioni di simmetria si ha $x_c = y_c = 0$. Calcoliamo z_c. Integrando per strati si trova

$$|\Omega| = \iiint_\Omega dxdydz = \int_{-1}^{2} \left(\iint_{\{x^2+y^2 \leq 36-9z^2\}} dxdy \right) dz = \pi \int_{-1}^{2} (36 - 9z^2)\, dz$$

$$= \pi \left(108 - 3z^3 \Big|_{-1}^{2} \right) = 81\pi\,.$$

Sempre integrando per strati si ottiene

$$\iiint_\Omega z\,dxdydz = \int_{-1}^{2}\left(\iint_{\{x^2+y^2\le 36-9z^2\}} z\,dxdy\right)dz = \pi\int_{-1}^{2}(36z-9z^3)\,dz$$
$$= \pi\left(18z^2-\frac{9}{4}z^4\right)_{-1}^{2} = \frac{81}{4}\pi\,.$$

Allora

$$z_c = \frac{1}{|\Omega|}\iiint_\Omega z\,dxdydz = \frac{1}{4}\,.$$

3. Sia
$$\Sigma_{-1} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+9z^2\le 36\,,\ z=-1\right\},$$
orientata con normale $-\mathbf{k}$, cosicché $\partial\Omega = \Sigma\cup\Sigma_{-1}$, orientata con normale esterna. Grazie al teorema della divergenza si ha
$$\Phi(\mathbf{F};\Sigma)+\Phi(\mathbf{F};\Sigma_{-1}) = \Phi(\mathbf{F};\partial\Omega) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \iiint_\Omega (3x+4y+2z+1)\,dxdydz\,.$$
Per ragioni di simmetria
$$\iiint_\Omega (3x+4y)\,dxdydz = 0\,.$$
Allora
$$\Phi(\mathbf{F};\Sigma)+\Phi(\mathbf{F};\Sigma_{-1}) = 2\iiint_\Omega z\,dxdydz + 3\iiint_\Omega dxdydz = 2|\Omega|z_c+|\Omega|$$
$$= \frac{3}{2}|\Omega| = \frac{243}{2}\pi\,.$$
Da questo si ottiene
$$\Phi(\mathbf{F};\Sigma) = \frac{243}{2}\pi - \Phi(\mathbf{F};\Sigma_{-1}) = \frac{243}{2}\pi - \iint_{\Sigma_{-1}} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot(-\mathbf{k})\,dS$$
$$= \frac{243}{2}\pi - \iint_{\{x^2+y^2\le 27\}} dxdy = \left(\frac{243}{2}-27\right)\pi = \frac{189}{2}\pi\,.$$

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x||y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\,, \end{cases}$$

con $\alpha>0$.

1. Determinare per quali $\alpha>0$ la funzione è continua in $(0,0)$.
2. Determinare per quali $\alpha>0$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.
3. Determinare per quali $\alpha>0$ la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento

1. Passando in coordinate polari si ottiene

$$f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = \rho^{\alpha-1}|\cos\vartheta||\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^{\alpha}\,,$$

   da cui si ricava che f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 1$. Infatti

$$|f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)| \le \rho^{\alpha-1} \to 0 \quad \text{per } \rho \to 0$$

   se $\alpha > 1$. Inoltre, se $\alpha = 1$, si ha

$$f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = |\cos\vartheta||\,\mathrm{sen}\,\vartheta|\,,$$

   che non ha limite per $\rho \to 0$, e per $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = +\infty \quad \text{per } \vartheta \ne k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

2. Si ha

$$f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

   da cui facilmente si ottiene $\partial_x f(0,0) = 0$ per ogni $\alpha > 0$, e analogamente

$$f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}\,,$$

   da cui si ottiene $\partial_y f(0,0) = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Allora f è derivabile in $(0,0)$ per ogni $\alpha > 0$, ed il suo gradiente in tale punto è nullo.

3. Naturalmente ha senso discutere la differenziabilità solo per quei valori di α per cui f è continua, e quindi possiamo supporre $\alpha > 1$. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y|^{\alpha}}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,.$$

   f è differenziabile se e solo se tale limite esiste e vale 0. Passando in coordinate polari si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha-2}|\cos\vartheta||\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > 2\,, \\ |\cos\vartheta||\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^2 & \text{se} \quad \alpha = 2\,, \\ +\infty & \text{se} \quad 1 < \alpha < 2 \text{ e } \vartheta \ne k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

   Essendo per $\alpha > 2$

$$\rho^{\alpha-2}|\cos\vartheta||\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^{\alpha} \le \rho^{\alpha-2}\,,$$

   si deduce che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 2$.