

**Programma del corso di Fondamenti di Analisi Matematica 2  
per Ingegneria dell'Energia e Ingegneria Chimica e dei Materiali  
Anno Accademico 2016/2017**

**Legenda:** dove compare (D) si intende che il teorema è stato dimostrato.

**Limiti e continuità di funzioni di più variabili**

*Curve.* Limite di funzioni a valori vettoriali: definizione e caratterizzazione tramite il limite delle componenti (D). Curve semplici, chiuse, piane. Sostegno di una curva. Vettore e versore tangente. Curve  $\mathcal{C}^1$ , regolari e regolari a tratti. Unione di curve. Integrazione di funzioni vettoriale e teorema fondamentale del calcolo (D). Cambiamento di parametro e orientazione di una curva. Curve in forma polare e curve cartesiane. Curve rettificabili e lunghezza di una curva. Rettificabilità di curve regolari e regolari a tratti. Indipendenza della lunghezza dal cambiamento di parametro (D). Parametro d'arco. Integrali di prima specie e loro applicazioni: baricentro di una curva e momento d'inerzia rispetto ad un asse.

*Topologia in  $\mathbb{R}^n$ .* Norma euclidea, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare. Intorni sferici. Punti interni, esterni, di frontiera. Punti di accumulazione e isolati. Insiemi aperti e chiusi. Caratterizzazione dei chiusi con i punti di accumulazione. Insiemi limitati. Insiemi connessi.

*Limiti.* Definizione di limite per funzioni di più variabili reali. Teoremi di unicità del limite, della permanenza del segno, del confronto e dei due carabinieri. Limiti in coordinate polari.

*Funzioni continue.* Teorema di Weierstrass. Teorema di Bolzano (D).

**Calcolo differenziale in più variabili**

*Funzioni reali.* Derivate parziali, gradiente e funzioni derivabili. Critica al concetto al concetto di derivabilità. Funzioni differenziabili. Continuità di una funzione differenziabile (D). Piano tangente al grafico di una funzione. Derivata lungo una direzione. Formula del gradiente (D). Direzione di massima crescita. Regola della catena. Ortogonalità del gradiente rispetto alle curve di livello (D). Derivate seconde e teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Formula di Taylor con il resto di Peano. Teorema della media (D).

*Funzioni a valori vettoriali* Differenziabilità e derivabilità di funzioni a valori vettoriali. Matrice jacobiana. Coordinate polari nel piano, sferiche e cilin-

driche nello spazio: matrici jacobiane e loro determinante. Differenziabilità della composizione di funzioni differenziabili e regola della catena.

### **Massimi e minimi per funzioni di più variabili**

*Massimi e minimi liberi.* Teorema di Fermat (D). Determinazione della natura dei punti di critici tramite la matrice hessiana (D per la parte riguardante matrici hessiane definite).

*Vincoli in  $\mathbb{R}^2$ .* Teorema di Dini in  $\mathbb{R}^2$  (D). Punti regolari di un vincolo e retta tangente. Teorema sui moltiplicatori di Lagrange (D). Lagrangiana di un problema di estremo. Legame tra punti critici vincolati e punti critici della lagrangiana (D).

*Vincoli in  $\mathbb{R}^3$ .* Cenni sul teorema di Dini in  $\mathbb{R}^3$ . Teoremi sui moltiplicatori di Lagrange. Lagrangiana di un problema di estremo. Legame tra punti critici vincolati e punti critici della lagrangiana.

### **Integrazione di funzioni di più variabili**

*Integrali doppi su un rettangolo.* Somme di Cauchy e definizione di funzione integrabile su un rettangolo. Integrabilità delle funzioni continue. Formule di riduzione.

*Integrali doppi: caso generale.* Definizione di funzione integrabile e proprietà dell'integrale. Insiemi misurabili. Insiemi semplici e regolari. Integrabilità delle funzioni continue su un insieme regolare. Formule di riduzione su un dominio semplice. Teorema del cambiamento di variabili. Baricentro e momento d'inerzia di un insieme misurabile.

*Integrali tripli.* Definizione di funzione integrabile. Insiemi misurabili. Integrazione per fili e per strati. Insiemi regolari. Baricentro e momento d'inerzia di un insieme misurabile. Teorema del cambiamento di variabili. Teorema di Pappo (D).

### **Campi vettoriali**

Linee di campo. Rotore e divergenza di un campo vettoriale. Integrali di seconda specie e loro comportamento rispetto ad un cambio di parametrizzazione. Campi conservativi e potenziale. Irrotazionalità di un campo conservativo (D). Dipendenza del lavoro di campi conservativi solo dai punti iniziale e finale (D). Caratterizzazione dei campi conservativi con gli integrali di seconda specie. Circuiti omotopi. Invarianza dell'integrale di un campo irrotazionale su circuiti omotopi. Insiemi semplicemente connessi. Equiva-

lenza tra campi irrotazionali e campi conservativi su insiemi semplicemente connessi.

## **Superfici e integrali di superficie**

*Superfici.* Superfici parametriche regolari. Equazione del piano tangente ad una superficie regolare. Superfici di rotazione. Superfici cartesiane e loro regolarità (D). Superfici orientabili. Bordo di una superficie e orientazione indotta. Superfici regolari a pezzi.

*Integrali superficiali.* Area di una superficie. Area di una superficie cartesiana. Teorema di Guldino sull'area di una superficie di rotazione. Definizione di integrale superficiale. Baricentro di una superficie. Momento d'inerzia rispetto ad un asse di una superficie. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

*Teoremi di Gauss e di Stokes.* Domini s-decomponibili. Formule di Gauss-Green nel piano (D per domini semplici rispetto ad entrambi gli assi). Formule per l'area di un dominio s-decomponibile (D). Teorema della divergenza. Teorema del rotore.

## **Equazioni differenziali ordinarie**

*Teoria generale.* Ordine di un'equazione. Equazioni in forma normale. Sistemi del primo ordine in forma normale. Riduzione di un'equazione di ordine  $n$  in forma normale ad un sistema di  $n$  equazioni del primo ordine in forma normale. Teorema di Peano. Teorema di Cauchy-Lipschitz. Teorema di esistenza e unicità globali.

*Equazioni e sistemi lineari.* Spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema lineare del primo ordine omogeneo (D, cenni). Matrice wronskiana e integrale generale di un sistema lineare del primo ordine. Base di soluzioni per un sistema lineare a coefficienti costanti con matrice diagonalizzabile in  $\mathbb{R}$  (D). Equazioni lineari di ordine  $n$  e spazio delle soluzioni. Base di soluzioni per un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Integrale generale di un sistema non omogeneo, noto l'integrale del sistema omogeneo associato (D). Metodo della variazione delle costanti (D). Equazioni lineari di ordine  $n$  non omogenee e metodo della variazione delle costanti (D).