

Convergenza di serie di Fourier

Di seguito, nelle figure 1–4, si trovano i grafici di alcune ridotte della serie di Fourier della funzione 2-periodica f tale che $f(x) = \operatorname{sgn} x$ per $x \in]-1, 1]$. La ridotta $(2n+1)$ -esima della serie di Fourier si scrive

$$s_{2n+1}[f](x) = \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi x).$$

Grazie al Criterio di Dini con le condizioni di Hölder, la serie di Fourier converge puntualmente (oltre che in $L^2(-1, 1)$) e, se $x \in]-1, 1]$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1}[f](x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1, \\ -1 & \text{se } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, 1. \end{cases}$$

È evidente che la serie non può convergere uniformemente essendo il limite puntuale una funzione che presenta discontinuità di tipo salto. Nei grafici riportati in seguito, le zone in grigio corrispondono all'area sottesa dai grafici delle funzioni

$$x \mapsto |f(x) - s_{2n+1}[f](x)|^2, \quad x \in]-1, 1].$$

Si noti che la misura A_n di una di queste aree soddisfa

$$A_n = \int_{-1}^1 |f(x) - s_{2n+1}[f](x)|^2 dx = \|f - s_{2n+1}[f]\|_{L^2(-1,1)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Il grafico di f è sempre riportato in nero.

Nelle figure 5–7 sono riportati i grafici di alcune ridotte della serie di Fourier della funzione 1-periodica g tale che $g(x) = 20x^2(x-1)^2$ per $x \in]0, 1]$. La serie di Fourier di tale funzione è di soli coseni, essendo g pari, converge totalmente a g e la sua serie formalmente derivata risulta essere la serie di Fourier di g' e converge totalmente a questa funzione. Nelle figure il grafico di g è sempre disegnato in nero, mentre in rosso sono disegnate le curve che rappresentano l'errore puntuale, cioè il modulo delle differenza tra g e la ridotta n -esima $s_n[g]$ della sua serie di Fourier,

$$x \mapsto \left| g(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n a_k \cos(2k\pi x) \right|,$$

dove

$$\frac{a_0}{2} = \int_0^1 g(t) dt, \quad a_k = 2 \int_0^1 g(t) \cos(2k\pi t) dt.$$

In questo modo è possibile apprezzare la convergenza totale e quindi uniforme della serie di Fourier. Si noti che in figura 7 i grafici di g e della ridotta $s_3[g]$ sono quasi sovrapposti.

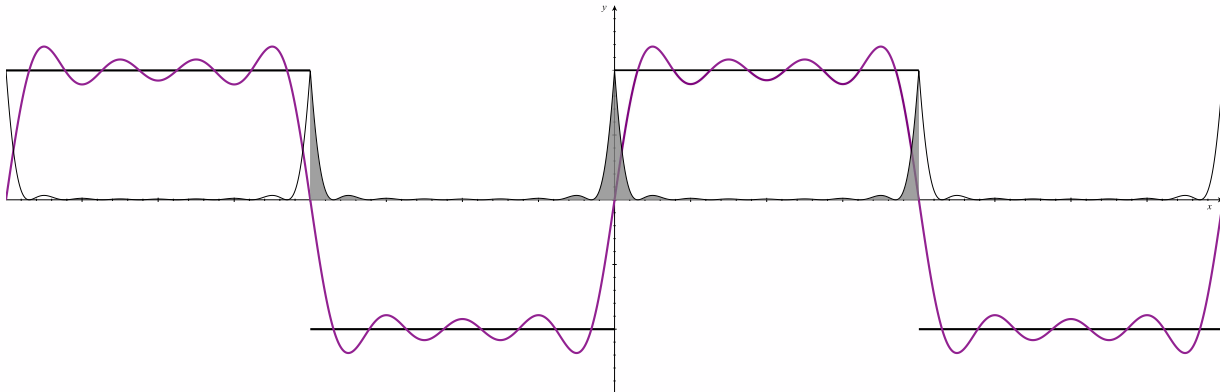


Figura 1: $s_7[f](x) = \sum_{k=0}^3 \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi x)$

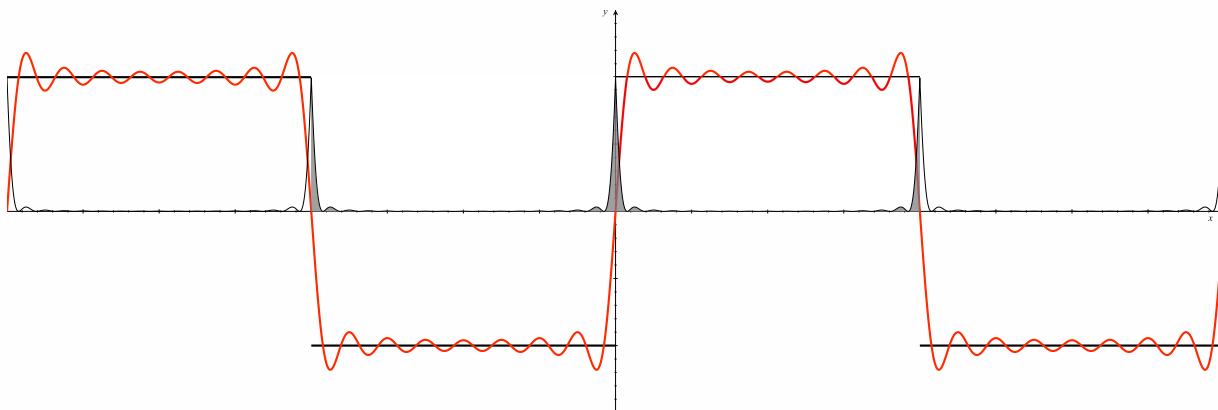


Figura 2: $s_{15}[f](x) = \sum_{k=0}^7 \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi x)$

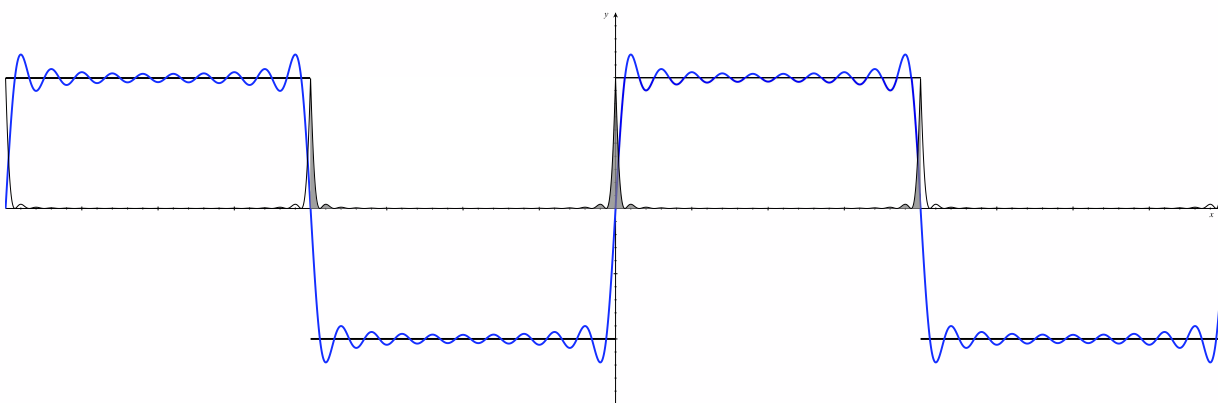


Figura 3: $s_{19}[f](x) = \sum_{k=0}^9 \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi x)$

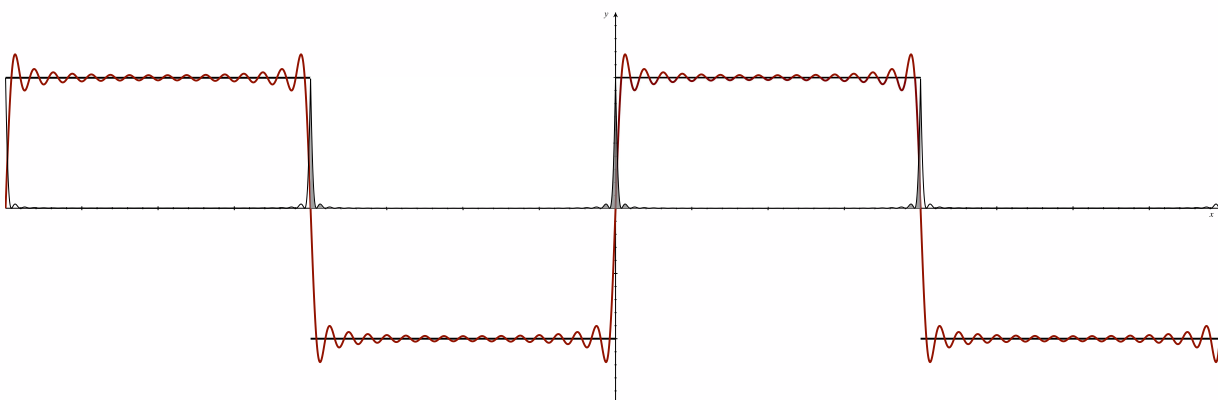


Figura 4: $s_{31}[f](x) = \sum_{k=0}^{15} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi x)$

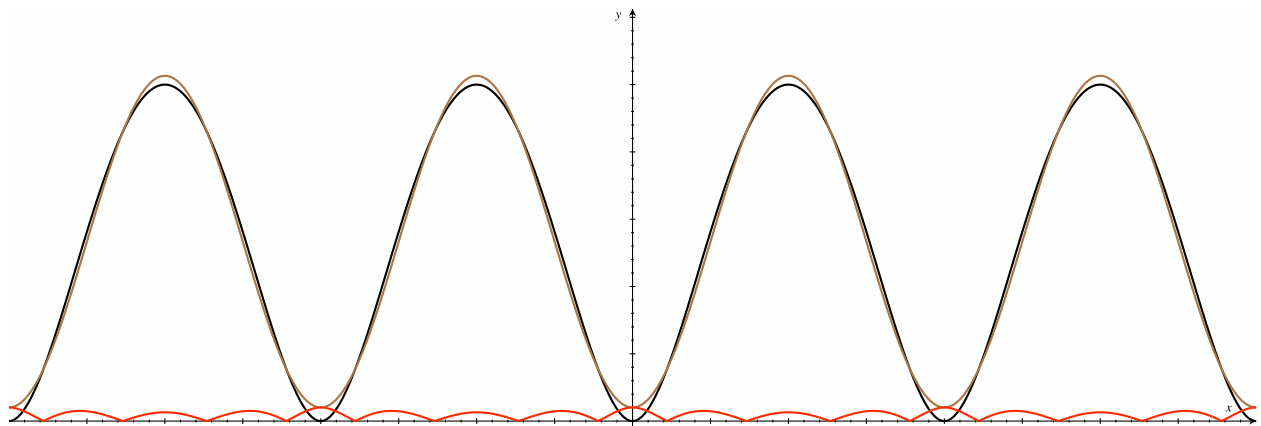


Figura 5: $s_1[g](x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2\pi x)$

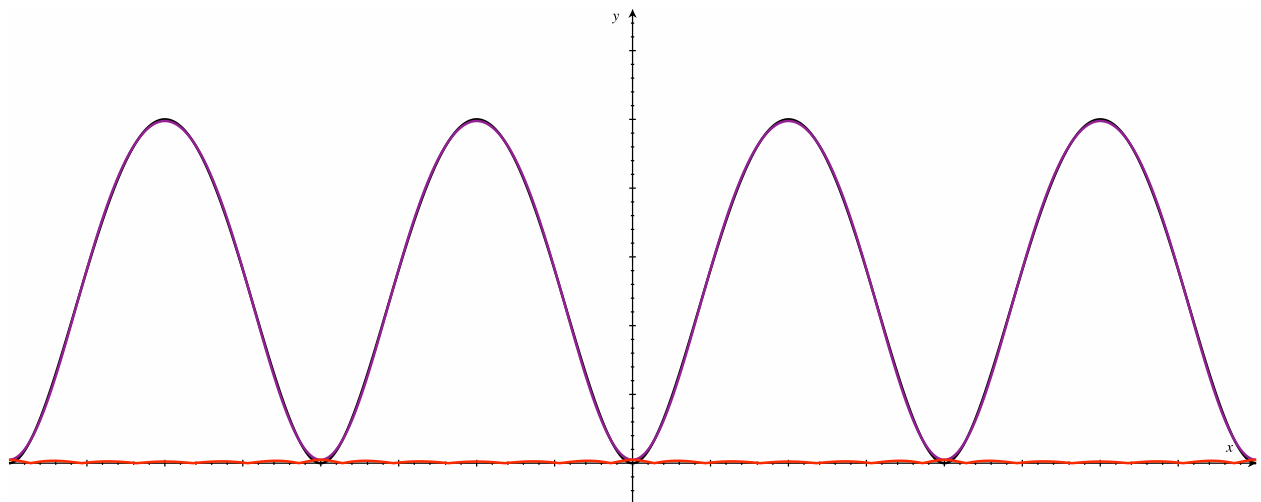


Figura 6: $s_2[g](x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2\pi x) + a_2 \cos(4\pi x)$

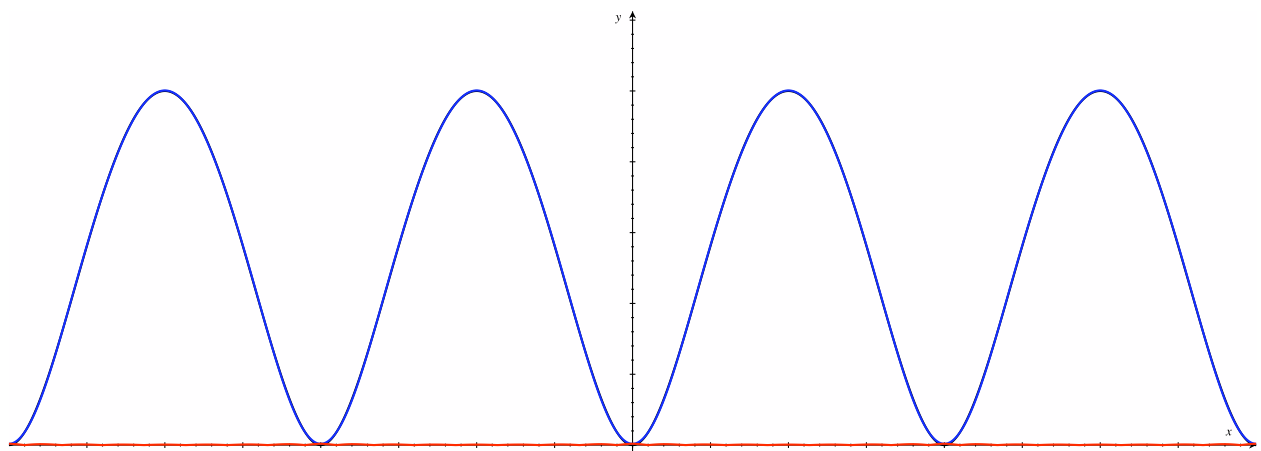


Figura 7: $s_3[g](x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2\pi x) + a_2 \cos(4\pi x) + a_3 \cos(6\pi x)$