Il Principio di Indeterminazione di Heisenberg

Il Principio di Indeterminazione di Heisenberg è uno dei fondamenti della meccanica quantistica, e stabilisce che non è possibile ottenere nello stesso tempo misure della posizione e della velocità di una particella che abbiano la stessa accuratezza. Volendo considerare particelle che si muovono nello spazio, abbiamo bisogno di introdurre la trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^3$. Per ragioni di completezza, daremo definizioni ed enunciati in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1 *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sommabile. Si definisce trasformata di Fourier di f la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ data da*

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\omega \cdot x}\, dx\,,$$

dove, se $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sono elementi di $\mathbb{R}^n$, allora

$$\omega \cdot x = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$$

indica il prodotto scalare di ω per x.

La trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$ gode delle stesse proprietà formali della trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$. In particolare, $\omega \mapsto \widehat{f}(\omega)$ è una funzione continua e limitata, infinitesima per $|\omega| \to +\infty$. Tale trasformata si può estendere a funzioni $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tramite il

Teorema 1 (di Plancherel) *Data $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, per $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, si definisca*

$$g_k(\omega) = \int_{B_k(0)} f(x) e^{-i\omega \cdot x}\, dx\,.$$

Allora $g_k \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ per ogni $k \geq 1$, e la successione $\{g_k\}_{k\geq 1}$ converge in $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ ad una funzione che chiamiamo trasformata di Fourier di f, e che indichiamo ancora con $\widehat{f}$ o $F[f]$. Inoltre vale l'identità

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = (2\pi)^n \|f\|_2^2\,. \tag{1}$$

È evidente che per $n = 1$ il teorema si riconduce al teorema di Plancherel in $\mathbb{R}$. È altrettanto evidente che nel caso in cui $f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ le due trasformate di Fourier di f in ambito L^1 (Definizione 1) e in ambito L^2 (Teorema di Plancherel) coincidono. Prima di enunciare il teorema che ci condurrà al Principio di Indeterminazione ci serve un'altra definizione.

Definizione 2 *Dati $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, con $\|f\|_2 > 0$, e $a \in \mathbb{R}^n$, si dice dispersione di f attorno al punto a la quantità*

$$\Delta_a f = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x-a|^2 |f(x)|^2\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx} = \frac{\big\|(x-a)f\big\|_2^2}{\|f\|_2^2}\,.$$

Si osservi che nulla vieta che la dispersione di f attorno ad a sia infinita: è sufficiente che la funzione $x \mapsto (x-a)f(x)$ non appartega a $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

Osservazione 1 Dato un vettore aleatorio X a valori in $\mathbb{R}^n$, supponiamo abbia una densità di probabilità $x \mapsto |f(x)|^2$, cosicché valgono

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx = 1 \,, \qquad \operatorname{Prob}(X \in \Omega) = \int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx \,,$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile. Se

$$a = E(X) = \int_{\mathbb{R}^n} x|f(x)|^2 \, dx$$

è il valore atteso (media) di X, allora vale

$$\Delta_a f = \int_{\mathbb{R}^n} |x-a|^2|f(x)|^2 \, dx = \operatorname{Tr}\Sigma(X) \,,$$

cioè la dispersione di f attorno ad a è la traccia della matrice di covarianza di X, che abbiamo denotato con $\Sigma(X)$. Tale traccia fornisce una misura della dispersione di X attorno al suo valor medio.

Per dimostrare il teorema principale di questa nota, è utile ricordiamo la definizione di funzione (localmente) assolutamente continua

Definizione 3 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua, derivabile q.o. con derivata f' localmente sommabile, cioè sommabile in ogni intervallo limitato ($f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$). Allora f si dice (localmente) assolutamente continua se vale*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s) \, ds \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \,.$$

Il teorema seguente contiene la *disuguaglianza di Heisenberg* da cui seguirà il Principio di Indeterminazione.

Teorema 2 (Disuguaglianza di Heisenberg) *Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, con $\|f\|_2 > 0$. Allora*

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \widehat{f}) \geq \frac{n^2}{4} \qquad \forall a, \alpha \in \mathbb{R}^n \,. \tag{2}$$

Dim. Ci limitiamo a dimostrare il teorema nel caso $n = 1$. Dapprima supponiamo $a = \alpha = 0$, cosicché (2) si riduce a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 \, dx\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \omega^2|\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega\right) \geq \frac{1}{4}\|f\|_2^2\|\widehat{f}\|_2^2 = \frac{\pi}{2}\|f\|_2^4 \,, \tag{3}$$

dove si è usata l'identità (1). Se $xf(x) \notin L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ o $\omega\widehat{f}(\omega) \notin L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, (3) è banalmente vera perché il primo membro è infinito. Supponiamo allora che $x \mapsto xf(x)$ e $\omega \mapsto \omega\widehat{f}(\omega)$ siano entrambe funzioni di $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. In tal caso sia f che $\widehat{f}$ sono funzioni assolutamente continue con $f', \widehat{f}' \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, per le note proprietà della trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$. Si osservi inoltre che vale

$$\lim_{x \to \pm\infty} x|f(x)|^2 = 0 \,. \tag{4}$$

Infatti, $x \mapsto x|f(x)|^2$ è funzione sommabile, poiché

$$|x||f(x)|^2 \le |f(x)|^2\chi_{[-1,1]}(x) + |x|^2||f(x)|^2\chi_{\{|x|>1\}}(x)\,,$$

ed entrambe le funzioni al secondo membro sono sommabili, essendo f e $x \mapsto xf(x)$ in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Se dimostriamo che $x \mapsto x|f(x)|^2$ ha limite per $x \to \pm\infty$, allora (4) segue immediatamente. Proviamolo per $x \to +\infty$, l'altro caso si dimostra in modo del tutto simile. Si osservi che essendo f localmente assolutamente continua, tale è anche $x \mapsto x|f(x)|^2$, e vale

$$x|f(x)|^2 = \int_0^x |f(s)|^2\,ds + 2\int_0^x sf'(s)|f(s)|\operatorname{sgn} f(s)\,ds\,, \tag{5}$$

dove, se $z \in \mathbb{C}$, allora $\operatorname{sgn} z = z/|z|$. Si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x |f(s)|^2\,ds = \|f\|^2_{L^2(0,+\infty;\mathbb{C})} < +\infty\,,$$

essendo $f \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Inoltre, denotando con $(\cdot\,|\,\cdot)$ il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left|sf'(s)|f(s)|\operatorname{sgn} f(s)\right|\,ds &= \Big(\left|sf(s)\cdot\operatorname{sgn} f(s)\right|\,\Big|\,|f'|\Big)\\ &\le \|sf(s)\|_2\|f'\|_2 < +\infty\,,\end{aligned}$$

e quindi la funzione $s \mapsto sf'(s)|f(s)|\operatorname{sgn} f(s)$ è sommabile in $\mathbb{R}$. Allora anche

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x sf'(s)|f(s)|\operatorname{sgn} f(s)\,ds$$

esiste finito, e da (5) si deduce che $x|f(x)|^2$ ha limite (finito) per $x \to +\infty$, come si voleva.
Ora osserviamo che, grazie a (1),

$$\int_{\mathbb{R}} |\omega\widehat{f}(\omega)|^2\,d\omega = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f'}(\omega)|^2\,d\omega = 2\pi\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx\,, \tag{6}$$

ed inoltre, integrando per parti e usando (4)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx &= x|f(x)|^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} - 2\int_{\mathbb{R}} xf'(x)|f(x)|\operatorname{sgn} f(x)\,dx\\ &\le 2\|xf(x)\|_2\|f'\|_2\,,\end{aligned} \tag{7}$$

dove si è usata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Da (6)-(7) si deduce

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx\right)^2 \le 4\|xf(x)\|_2^2\|f'\|_2^2 = \frac{2}{\pi}\|xf(x)\|_2^2\|\omega\widehat{f}(\omega)\|_2^2\,,$$

da cui si ottiene (3).
Per dimostrare il teorema con $a, \alpha \in \mathbb{R}$ generici, consideriamo la funzione $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$G(x) = e^{-i\alpha x}f(x+a)\,,$$

che appartiene ad $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, perché vi appartiene f. Allora

$$\Delta_0 G = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |f(x+a)|^2 \; dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x+a)|^2 \; dx} \overset{y=x+a}{=} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |y-a|^2 |f(y)|^2 \; dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 \; dy} = \Delta_a f \,.$$

Inoltre

$$\widehat{G}(\omega) = F\big[f(x+a)\big](\omega+\alpha) = e^{ia(\omega+\alpha)} \widehat{f}(\omega+\alpha) \,,$$

da cui si ottiene

$$\Delta_0 \widehat{G} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\omega|^2 |\widehat{f}(\omega+\alpha)|^2 \; d\omega}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega+\alpha)|^2 \; d\omega} \overset{\xi=\omega+\alpha}{=} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\xi-\alpha|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \; d\xi}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \; d\xi} = \Delta_\alpha \widehat{f} \,,$$

e quindi, grazie a (3),

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \widehat{f}) = (\Delta_0 G)(\Delta_0 \widehat{G}) \geq \frac{1}{4} \,,$$

come si voleva. $\square$

In meccanica quantistica una particella che si muove (ad esempio un elettrone) è descritta con una *funzione d'onda*, cioè una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$, tale che $\|f\|_2 = 1$; la funzione $x \mapsto |f(x)|^2$ è interpretata come una densità di probabilità, cosicché, dato un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ misurabile, la quantità

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \; dx$$

dà la probabilità che la particella si trovi in Ω. La condizione $\|f\|_2 = 1$ garantisce che effettivamente $|f|^2$ sia una densità di probabilità. Supponiamo ora di effettuare delle misure sulla posizione della particella, ottenendo un vettore aleatorio X a valori in $\mathbb{R}^3$, con densità $|f|^2$. Se a è la media di X, grazie all'Osservazione 1, la dispersione $\Delta_a f$ di f attorno ad a è la traccia della matrice di covarianza di X, e fornisce una misura dell'errore che si commette valutando con a la posizione della particella.
La trasformata di Fourier della funzione d'onda fornisce la densità di probabilità per la quantità di moto. Più precisamente si definisce una trasformata di Fourier modificata $\widetilde{f}$ ponendo

$$\widetilde{f}(\xi) \doteq \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \widehat{f}(\xi/\hbar) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-ix\cdot\xi/\hbar} \; dx \,,$$

dove $\hbar$ è la costante di Dirac, cioè, se h è la costante Planck,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.054571628 \times 10^{-27} \mathrm{erg} \cdot \mathrm{sec} \,.$$

Dall'identità (1) si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\widetilde{f}(\xi)|^2 \; d\xi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\xi/\hbar)|^2 \; d\xi \overset{\omega=\xi/\hbar}{=} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\omega)|^2 \; d\omega = \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^2 \; dx = 1 \,,$$

cosicché $|\widetilde{f}(\xi)|^2$ è effettivamente una densità di probabilità: dato $\Theta \subseteq \mathbb{R}^3$ misurabile, l'integrale

$$\int_\Theta |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi$$

è la probabilità che la particella la cui funzione d'onda è f abbia quantità di moto appartenente a Θ. Analogamente a quanto osservato prima per f, se Ξ è una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^3$ che dà la misura della quantità di moto della particella con funzione d'onda f, e se la media di Ξ è $\alpha \in \mathbb{R}^3$, allora la dispersione di $\widetilde{f}$ attorno ad α, $\Delta_\alpha \widetilde{f}$, fornisce una misura dell'errore che si commette assegnando alla quantità di moto il valore α.

A questo punto siamo pronti per dedurre il Principio di Indeterminazione dalla disuguaglianza di Heisenberg (2). Dato $\alpha \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$\begin{aligned}
\Delta_\alpha \widetilde{f} &= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\xi - \alpha|^2 |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, d\xi} = \frac{(2\pi\hbar)^{-3/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\xi - \alpha|^2 |\widehat{f}(\xi/\hbar)|^2 \, d\xi}{(2\pi\hbar)^{-3/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\xi/\hbar)|^2 \, d\xi} \\
&\overset{\omega=\xi/\hbar}{=} \frac{\hbar^3 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\hbar\omega - \alpha|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega}{\hbar^3 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega} = \frac{\hbar^2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\omega - \alpha/\hbar|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega} \\
&= \hbar^2 \Delta_{\alpha/\hbar} \widehat{f}
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Heisenberg (2) con $n = 3$ si ottiene

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \widetilde{f}) = \hbar^2 (\Delta_a f)(\Delta_{\alpha/\hbar} \widehat{f}) \geq \frac{9}{4}\hbar^2 \,, \tag{8}$$

che è il Principio di Indeterminazione di Heisenberg, e mette in correlazione gli errori commessi nel valutare posizione e quantità di moto (e quindi velocità) di una particella. Se si misurano contemporaneamente posizione e quantità di moto di una particella, le densità di porbabilità delle variabili aleatorie che si ottengono sono rispettivamente la funzione d'onda f e la sua trasformata $\widetilde{f}$. Ne consegue che gli errori che si commettono valutando posizione e quantità di moto con le loro medie sono correlati tramite (8), e quindi non è possibile avere la stessa accuratezza nelle due misure.

Bibliografia

G.B. Folland, *Fourier analisys and its applications*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove (CA) 1992