## Esercizi su Serie Numeriche

**Esercizio 1** Determinare se le seguenti serie numeriche sono convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$$

**Esercizio 2** Sia

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n^2-n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

i) Trovare $\alpha, C$ tali che $a_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.

ii) Stabilire se converge la serie $\sum_n a_n$.

**Esercizio 3** Sia

$$a_n := n^\alpha \left(1 - \sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}}\right).$$

i) Trovare $\alpha, C$ tali che $a_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.

ii) Stabilire se converge la serie $\sum_n a_n$.

**Esercizio 4** Stabilire se le seguenti serie sono convergenti o meno

- $\sum_{n\geq 1} \left(1 + e^{\frac{1}{n}} - 2e^{\frac{1}{2n}}\right)$.
- $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n} \log\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+2}\right)$.
- $\sum_{n\geq 1} \frac{\log(n+1)-\log n}{\sqrt{n}+\log n}$.
- $\sum_{n\geq 1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

**Esercizio 5** Sia

$$f(x) := x - \arctan x.$$

i) Studiando brevemente la funzione $f$ su $[0, +\infty[$ mostrare che $x \geq \arctan x$ per ogni $x \geq 0$.

ii) Scrivere lo sviluppo asintotico di $f$ in $x = 0+$ arrestato al primo termine polinomiale utile. Dedurne $C, \alpha$ tali che $f(x) \sim Cx^\alpha$ per $x \to 0+$.

iii) Determinare per quali $\beta > 0$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n}\right).$$

**Esercizio 6** Determinare per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+\sin n)\left(\frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

**Esercizio 7** Dire per quali $\alpha > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

**Esercizio 8** Per ciascuna delle seguenti serie numeriche dire se convergono normalmente ed assolutamente:

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$;

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{(-1)^n}{n}$;

iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{n} - e^{-\frac{1}{n^\alpha}}\right)$, $(\alpha > 0)$.

**Esercizio 9** Dimostrare che la serie

$$\sum_{n\geq 1}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

è convergente.

**Esercizio 10** Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+e^x}.$$

**Esercizio 11** Si chiama *funzione di Bessel* la serie

$$J_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2^{2^n}(n!)^2}.$$

Mostrare che l'insieme di convergenza è tutto $\mathbb{C}$ e determinare $J_0(1)$ a meno di $10^{-3}$.

**Esercizio 12** Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{x^2+2}-x)^n\left(1+\frac{1}{4^n}\right)^{n^2} ?$$

Descrivere gli insiemi dove la serie converge assolutamente e dove semplicemente.

**Esercizio 13** Applicando opportuni criteri di convergenza, stabilire quali tra le seguenti serie sono convergenti e quali no:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^2(2n)!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{nx}}{n!},\quad (x\in\mathbb{R}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^x}{n^n},\quad (x\in\mathbb{R}),\quad \sum_{n=1}^{\infty}x^{n!},\quad (x\in\mathbb{R}).$$