Esercizi su Equazioni Differenziali

Esercizio 1 *Delle seguenti equazioni del primo ordine determinare l'integrale generale sugli intervalli indicati:*

i)
$$y'(t) + (\cos t)y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

ii)
$$y'(t) - \frac{t}{1-t^2}y(t) = t, \quad t \in]-1, 1[.$$

iii)
$$y'(t) - \frac{1}{t}y(t) + \frac{\log t}{t} = 0, \quad t \in]0, +\infty[.$$

iv)
$$y'(t) + 2ty(t) = 2t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

v)
$$y'(t) + (\tan t)y(t) = t^3, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Esercizio 2 Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) - (\tan t)y(t) = \frac{1}{\sin t}, \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

i) Determinarne l'integrale generale.

ii) È vero che ogni soluzione è tale che $\lim_{t\to 0+} y(t) = -\infty$?

iii) Dire se esistono soluzioni tali che $\exists \lim_{t\to \frac{\pi}{2}-} y(t) \in \mathbb{R}$. In tal caso, quanto vale tale limite?

Esercizio 3 Delle seguenti equazioni del secondo ordine determinare le soluzioni fondamentali, l'integrale generale (si omette la dipendenza da t nel testo; per es. y' sta per $y'(t)$) e risolvere il problema di Cauchy con le condizioni assegnate

- $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
- $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.
- $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$.

Esercizio 4 *Delle seguenti equazioni determinare soluzioni fondamentali, integrale particolare ed integrale generale (si omette, per brevità, la dipendenza da t nell'incognita):*

- $y'' - y' + y = e^t$
- $y'' + 4y' + 2y = t^2$

- $y'' + 2y' = e^t$
- $y'' - y = \cos t$
- $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$
- $y'' + 2y' + 2y = 2t + 3 + e^{-t}$
- $y'' - 2y' + 2y = e^t \cos t$

Esercizio 5 *Di ciascuna delle seguenti equazioni determinare soluzioni fondamentali, integrale particolare ed integrale generale. Determinare poi se esiste e qual'è l'eventuale soluzione soddisfacente alle condizioni* $y(0) = y'(0) = 0$. *(si omette, per brevità, la dipendenza da* t *nell'incognita)*

- $y'' - y = t$
- $y'' + 4y = e^t$
- $y'' + y = t$
- $y'' + y' - 6y = -4e^t$.

Esercizio 6 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

i) Determinarne l'integrale generale.

ii) È vero che ogni soluzione è tale che $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}-} y(t) = +\infty$?

iii) Dire se esistono soluzioni dell'equazione tali che $y(t) \sim Ct^2$ per $t \to 0$.

Esercizio 7 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + y'(t) = t + \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare il sistema fondamentale di soluzioni.

(b) Determinare un integrale particolare e l'integrale generale dell'equazione.

(c) Dire se esistono soluzioni φ dell'equazione tali che

$$\exists \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) \in \mathbb{R}.$$

(d) Dire se esistono soluzioni φ dell'equazione tali

$$\varphi(0) = 0, \quad \lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = +\infty.$$

Esercizio 8 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 4y(t)(1 - y(t)), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

i) Dire se l'equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità.

ii) Determinare le soluzioni stazionarie.

iii) Mostrare che la soluzione φ del problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $0 \leq \alpha \leq 1$.

iv) Tracciare un grafico qualitativo della soluzione per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 9 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)(1 - y(t)^2), \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

i) Dire se l'equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità.

ii) Determinare le soluzioni stazionarie.

iii) Mostrare che la soluzione φ del problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $-1 \leq \alpha \leq 1$.

iv) Tracciare un grafico qualitativo della soluzione per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 10 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t(y(t) + 1)}{t^2 + 1}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

i) Dire se l'equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità.

ii) Determinare le soluzioni stazionarie.

iii) Mostrare che la soluzione φ del problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) Dire se esiste, ed in tal caso calcolare, al variare di α il $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$.

Esercizio 11 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2(y(t) - 1)}{t(t^2 + 2t + 2)}, \quad t > 0 \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

i) Dire se l'equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità.

ii) Determinare le soluzioni stazionarie.

iii) Studiare crescenza e decrescenza delle soluzioni al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) Dire se esiste, ed in tal caso calcolare, al variare di α il $\lim_{t \to 0+} \varphi(t)$.