Esercizi su Successioni numeriche

A. Fondamenti — Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una funzione $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dove $a_n := a(n)$. Diciamo che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}, \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ :\ |a_n - \ell| \le \varepsilon,\ \ \forall n \ge N_0(\varepsilon).$$

Si scrive anche $a_n \longrightarrow \ell$.

Esercizio 1 *Mostrare, usando la definizione, che*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right) = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n^2+3n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} = 1.$$

Si dice che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty,\ (-\infty), \quad \Longleftrightarrow \quad \forall K,\ \exists N_0(K) \in \mathbb{N},\ :\ a_n \ge K,\ (a_n \le K),\ \forall n \ge N_0(K).$$

Si scrive anche $a_n \longrightarrow +\infty(-\infty)$.

Esercizio 2 *Mostrare, usando la definizione, che*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n-1}\right) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n+1} = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1-n}{1+\sqrt{n}} = -\infty, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1-\sqrt{n}} = -\infty.$$

Si chiama **sottosuccessione** di una successione $\{a_n\}$ una successione $b_k := a_{n_k}$ dove $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e $n_{k+1} > n_k$. Si scrive $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$. Alcune proprietà importanti legano una successione alle sue sottosuccessioni:

- se $a_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ allora per ogni sottosuccessione $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ si ha che $a_{n_k} \longrightarrow \ell$.
- **(criterio di non esistenza)** se esistono due sottosuccessioni $\{a_{n_k}\}, \{a_{m_k}\} \subset \{a_n\}$ tali che $a_{n_k} \longrightarrow \ell_1$, $a_{m_k} \longrightarrow \ell_2$ e $\ell_1 \ne \ell_2$ allora $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Esercizio 3 *Mostrare che le seguenti successioni non ammettono limite:*

$$a_n := \begin{cases} 1, & n \text{ pari},\\[2mm] \frac{1}{n}, & n \text{ dispari} \end{cases} \qquad a_n := (-1)^n n^2, \quad a_n := \sin\frac{n\pi}{4}, \quad a_n := (-1)^n - (-1)^{n^2}.$$

Esercizio 4 *Sapendo che $n^\alpha \longrightarrow +\infty$ per ogni $\alpha > 0$ ed utilizzando le sottosuccessioni mostrare che*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[4]{n^5+1} = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(n^3+n^2-2n+1\right)^\alpha = +\infty,\ (\alpha > 0), \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^7+2n+3} = +\infty.$$

B. Regole di calcolo — Attraverso le regole di calcolo si può ricondurre il calcolo di limiti di espressioni composte attraverso operazioni algebriche a limiti delle singole parti costituenti. Abbiamo anzitutto le regole per i limiti finiti: *siano* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$.

$$\textit{Se}\ \ a_n \longrightarrow \ell_1,\quad b_n \longrightarrow \ell_2,\quad \ell_1,\ell_2 \in \mathbb{R}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \bullet\ a_n \pm b_n \longrightarrow \ell_1 \pm \ell_2,\\ \bullet\ a_n b_n \longrightarrow \ell_1\ell_2,\\ \bullet\ \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2},\ \textit{se}\ \ell_2 \ne 0. \end{array}$$

Tali regole funzionano solo per i limiti finiti così come sono scritte. Tuttavia spesso ci si trova a dover fronteggiare casi nei quali tali regole non si possono applicare perché ci sono limiti infinit coinvolti. Esistono una serie di estensioni a questi casi delle regole precedenti che possono essere facilmente ricordate e comprese con un minimo di buon senso:

- **(estensioni per la somma)** Siano $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$, $a_n \longrightarrow \ell_1$, $b_n \longrightarrow \ell_2$. Allora

$$\text{se } \ell_1 = \pm\infty,\ \ell_2 \in \mathbb{R}, \quad \Longrightarrow \quad a_n + b_n \longrightarrow \pm\infty,$$

$$\text{se } \ell_1 = +\infty,\ \ell_2 = +\infty, \quad \Longrightarrow \quad a_n + b_n \longrightarrow +\infty,$$

$$\text{se } \ell_1 = -\infty,\ \ell_2 = -\infty, \quad \Longrightarrow \quad a_n + b_n \longrightarrow -\infty.$$

  Se $\ell_1 = +\infty$ ed $\ell_2 = -\infty$ nulla si può dire sul valore del limite.

- **(estensioni per il prodotto)** Siano $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$, $a_n \longrightarrow \ell_1$, $b_n \longrightarrow \ell_2$. Allora

$$\begin{array}{lll} \text{se } \ell_1 = \pm\infty,\ \ell_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, & \Longrightarrow & a_n b_n \longrightarrow \pm\mathrm{sgn}(\ell_2)\infty, \\ \text{se } \ell_1 = \pm\infty,\ \ell_2 = \pm\infty, & \Longrightarrow & a_n b_n \longrightarrow +\infty, \\ \text{se } \ell_1 = \pm\infty,\ \ell_2 = \mp\infty, & \Longrightarrow & a_n b_n \longrightarrow -\infty. \end{array}$$

  Se $\ell_1 = \pm\infty$ ed $\ell_2 = 0$ nulla si può dire sul valore del limite.

- **(estensioni per il quoziente)** Siano $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$, $a_n \longrightarrow \ell_1$, $b_n \longrightarrow \ell_2$. Allora

$$\begin{array}{lll} \text{se } \ell_1 = \pm\infty,\ \ell_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, & \Longrightarrow & \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \pm\mathrm{sgn}(\ell_2)\infty, \\ \text{se } \ell_1 = \pm\infty,\ \ell_2 = 0+, & \Longrightarrow & \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \pm\infty, \\ \text{se } \ell_1 = \pm\infty,\ \ell_2 = 0-, & \Longrightarrow & \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \mp\infty, \\ \text{se } \ell_1 \in \mathbb{R},\ \ell_2 = \pm\infty, & \Longrightarrow & \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0. \end{array}$$

  Se $\ell_1 = \pm\infty$ ed $\ell_2 = \pm\infty$ nulla si può dire sul valore del limite. È da notare che con $\ell_2 = 0+$ intendiamo $b_n \longrightarrow 0$ e $b_n > 0$ per ogni n, od anche solo *definitivamente*, cioè per ogni $n \geq N_0$. Similmente $\ell_2 = 0-$.

Il minimo di "buon senso" di cui si diceva sopra si può riassumere nel seguente schema:

$$(\pm\infty) + \ell = +\infty, \qquad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(\pm\infty)\ell = \pm\mathrm{sgn}(\ell)\infty,\ (\ell \neq 0), \quad (\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, \quad (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty,$$

$$\frac{\pm\infty}{\ell} = \pm\mathrm{sgn}(\ell)\infty,\ (\ell \neq 0), \quad \frac{\pm\infty}{0+} = \pm\infty \quad \frac{\pm\infty}{0-} = \mp\infty \quad \frac{\ell}{\pm\infty} = 0,$$

Esercizio 5 *Calcolare i seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2-3n}{2n+1}\right)^3, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n+a} - \sqrt[3]{n},\ (a>0), \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+n-1} - n\sqrt{2}\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2(n+1))!(n!)^2},$$

Esercizio 6 *Discutere, al variare del parametro reale* $\alpha > 0$ *esistenza e determinare il valore dei seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha - n + 1}{n^2+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^\alpha+5} - \sqrt{n+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Infine ricordiamo la regola *limitata*$\times$*infinitesima* = *infinitesima*:

$$\{a_n\} \text{ limitata}, \quad b_n \longrightarrow 0, \quad \Longrightarrow \quad a_n b_n \longrightarrow 0.$$

Esercizio 7 *Determinare i seguenti limiti*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin n}{n^2+1},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sin n}{n-\cos n},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\sin(n!)}{n+1},\quad \lim_{n\to+\infty}(n+(-1)^n\sqrt{n}).$$

C. Limiti notevoli — I limiti notevoli sono limiti di successioni particolarmente importanti che quindi meritano un'attenzione speciale.

$$n^\alpha \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & \alpha>0,\\ 1, & \alpha=0,\\ 0, & \alpha<0.\end{cases}\qquad a^n \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & a>1,\\ 1, & a=1,\\ 0, & 0<a<1.\end{cases}\qquad \frac{a^n}{n^\alpha}\longrightarrow \begin{cases} +\infty, & a>1,\ \forall\alpha,\\ 0, & 0<a<1,\ \forall\alpha.\end{cases}$$

Ovviamente, per il terzo limite (confronto esponenziali/potenze) il caso $a=1$ si riconduce ai limiti delle potenze essendo $\frac{1^n}{n^\alpha}=n^{-\alpha}$.

Esercizio 8 *Calcolare i seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{(n+2)^n},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2 2^n}{5^n},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n^5}{3^n-n^2},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2 2^n+n^{10}-5^n}{n^2 5^n+10^n},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^7+2^n-5^n}{n^{5000}-3^n}.$$

Esercizio 9 ($\star$) *Sia $a\in\mathbb{R}$. Classificare l'eventuale forma di indecisione e calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2a^2}{a^2+1}\right)^n-n^{-5a}\right].$$

Esercizio 10 ($\star$) *Discutere, al variare di $\alpha,\beta>0$ l'esistenza ed il valore dei seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha^n-n^\beta),\qquad \lim_{n\to+\infty}(\beta^n+n^\alpha).$$

Utilizzare il risultato per discutere l'esistenza del

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^n-n^\beta}{\beta^n+n^\alpha}.$$

Altro limite notevole è quello che da luogo alla *costante di Nepero*:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\in]2,3[.$$

Esercizio 11 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n,\ (k\in\mathbb{N}),\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n.$$