

## ESERCIZI SU NUMERI COMPLESSI

**1. Forma algebrica**

**Esercizio 1** Determinare i valori di  $a \in \mathbb{R}$  tali che il numero

$$z = \frac{i}{a+1-ia}$$

sia immaginario.

**Esercizio 2** Risolvere le seguenti equazioni in  $\mathbb{C}$ :

$$z^2 + 2\bar{z} = |z|^2, \quad \bar{z}\text{Im}z - z|z| = 0, \quad iz(\bar{z} + 1) - |z|\text{Re}z = 0.$$

**Esercizio 3** Disegnare, nel piano di Gauss, i seguenti insiemi:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-4}{z+4} \right| \geq 3 \right\}, \quad \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im} \left( \frac{i(z-3)}{z-1} \right) < 0 \right\}.$$

$$\left\{ x \in \mathbb{C} : \text{Re} \left( \frac{z}{z+1} \right) \leq \text{Im} \left( \frac{\bar{z}+1}{z+1} \right) \right\}, \quad \{ z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) - |z + \bar{z}|^2 > 1, \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) < 2 \}.$$

**Esercizio 4** Trovare i numeri complessi  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$\begin{cases} z^2\bar{z} - \bar{z}z = -\bar{z}, \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1. \end{cases}$$

**Esercizio 5** Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  e

$$S_\alpha := \{ z \in \mathbb{C} : z\bar{z} + (-1+i)z + (-1-i)\bar{z} + \alpha < 0 \}.$$

Dire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  risulta che  $S_\alpha$  non è vuoto e disegnarlo nel piano di Gauss.

**Esercizio 6** (\*) Consideriamo l'equazione

$$|z|z^2 + \text{Re}(z)\text{Im}(z) - |z|^2z = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Osservato che  $z = 0$  è soluzione, determinare tutte le soluzioni  $z \neq 0$  dell'equazione (cominciare a sostituire  $z = x + iy$  e discutere attentamente tutti i casi possibili...).

**2. Forma trigonometrica**

**Esercizio 7** Risolvere, in  $\mathbb{C}$ , le seguenti equazioni:

i)  $z^8 = i\bar{z}|z|.$

ii)  $9iz^5 = 16\bar{z}.$

iii)  $z|z|^2 - i4\bar{z} = 0.$

iv)  $8z^3|z| = \bar{z}.$

v)  $\bar{z}^3|\bar{z}|^2 = 2z^4.$