Esercizi

Esercizio 1 Mostrare, utilizzando la definizione $\varepsilon - \delta$, che esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1} = 3, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -1.$$

Esercizio 2 Determinare gli eventuali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ che rendono la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & x < \frac{\pi}{2}, \\ ax^2 + b, & \frac{\pi}{2} \le x < 2, \\ 3, & x \ge 2, \end{cases}$$

continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 Determinare gli eventuali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ che rendono la funzione

$$f(x) := \begin{cases} -2\sin x, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \ge \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 4 Determinare gli eventuali valori di $x_0 \in \mathbb{R}$ che rendono la funzione

$$f(x) := \begin{cases} x + 1, & x < x_0, \\ \\ x^2 - 2x - 1, & x \ge x_0. \end{cases}$$

continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

dire se è possibile definirla anche in $x_0 = 1$ di modo tale che risulti continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 6 Dire se la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}, & x \ne 0, \\ \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7 Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) < 0$ per $x < 1$ e $f(x) > 0$ per $x > 1$, f continua in $[0, 1[\cup]1, 2]$. Per ciascuna fra le seguenti proposizioni mostrare se è vera oppure fornire un controesempio:

- Se $f(1) = 0$ allora f è continua anche in $x_0 = 1$.
- Se $\lim_{x \to 1-} f(x) < 0$, allora f non può essere continua anche in $x_0 = 1$.
- Se $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)$ allora f è continua anche in $x_0 = 1$.
- Se $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)$ ed f è monotona crescente allora f è continua anche in $x_0 = 1$.

Esercizio 8 Per ciascuna delle seguenti funzioni reali di variabile reale determinare il dominio, il segno e stabilire in quali punti del dominio è continua:

- $f(x) := \frac{\sqrt{x^4-3x^2+2}}{x}$
- $f(x) := \frac{x \log x}{x-1}$
- $f(x) := \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$
- $f(x) := x e^{\frac{x}{x-1}}$
- $f(x) := \sqrt{x+1} - 2x + 1$
- $f(x) := \sin\left(\frac{e^x}{e^{2x}-e^x+1}\right)$ $(x \in [0, 2\pi])$

Esercizio 9 Calcolare, avvalendosi solo di opportune manipolazioni algebriche dell'espressione, i seguenti limiti

i)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} + \sqrt[3]{x^5+x^2}}{\sqrt[4]{x^9-2x-1} - \sqrt[5]{x^7-x^5}}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

ii)

$$\lim_{x \to 2+} \frac{|x-2|}{(x^2+1)(x-2)}, \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{1+x+\frac{|x|}{x}},$$

iii)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}, \quad \lim_{x \to \pi} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\sin x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) x, \quad \lim_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2+x}\right).$$

Esercizio 10 ($\star$) Determinare i valori $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - (ax^2+bx)\right) = 0.$$

Esercizio 11 Dimostrare che

$$\lim_{x \to 0+} \min\left\{x, \frac{1}{x}\sin^2\frac{1}{x}\right\} = 0.$$

(sugg.: applicare opportunamente il teorema dei due carabinieri...)