## Esercizi su funzioni continue e proprietà delle funzioni continue

**Esercizio 1** Sia $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) := \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1},$$

ove $x \in D(f)$ se e solo se il limite precedente esiste finito.

i) Determinare $D(f)$.

ii) Calcolare esplicitamente $f$.

iii) Dire dov'è continua $f$.

**Esercizio 2** Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x)| \leq |x|, \quad \forall x \neq 0.$$

Mostrare che $f$ è prolungabile anche ad $x = 0$ in modo tale che la funzione risultante sia continua in $x_0 = 0$.

**Esercizio 3** Dimostrare che l'equazione

$$x^5 - 3x = 1$$

ammette almeno una soluzione reale in $]1, 2[$. Determinare la soluzione a meno di $\frac{1}{20}$.

**Esercizio 4** Siano $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tali che $f(0) = g(1) = 0$ e $f(1) = g(0) = 0$. Quale fra le seguenti proposizioni è vera ?

- $f$ è crescente su tutto l'intervallo $[0, 1]$ mentre $g$ è decrescente su tutto l'intervallo $[0, 1]$.
- Se $f$ e $g$ sono continue su $[0, 1]$ allora deve necessariamente esistere un punto $\bar{x} \in ]0, 1[$ tale che $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$.
- Se $f$ e $g$ sono continue su $[0, 1]$ allora $f/g$ è continua su $]0, 1[$.

Dimostrare le affermazioni che sono vere e confutare con un esempio quelle che sono false.

**Esercizio 5** Sia $p$ un polinomio di grado dispari $\geq 1$. Mostrare che ammette almeno una radice reale (ovvero, mostrare che $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(x_0) = 0$).

**Esercizio 6** Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Mostrare che se ogni punto $x_0 \in [a, b]$ è punto di minimo locale allora $f$ deve essere necessariamente costante.