

ESERCIZI SU DERIVABILITÀ E CALCOLO DI DERIVATE

Esercizio 1 Per ciascuna delle seguenti funzioni scrivere: a) formula di Taylor arrestata al primo ordine e b) equazione della retta tangente al grafico in ciascuno dei punti x_0 indicati:

$$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$g(x) = e^{x-1}, \quad x_0 = 0,$$

$$k(x) = \log(x^2 + 1), \quad x_0 = 0.$$

Esercizio 2 Sia

$$f(x) := \begin{cases} x, & x < 0, \\ ax^2 + bx + c, & 0 \leq x < 1, \\ x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Dire se esistono dei valori $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua e derivabile su $\mathbb{R}$. Nel caso tali valori esistano, dire poi se la f corrispondente è anche tale che f' è continua?

Esercizio 3 Sia

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mostrare che

- i) f è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed, in particolare, in $x_0 = 0$.
- ii) f non è derivabile in $x_0 = 0$.

Esercizio 4 Sia

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- i) Mostrare che f è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed, in particolare, in $x_0 = 0$.
- ii) È vero che f è derivabile in $x_0 = 0$? (dimostrare o confutare)

Esercizio 5 Per ciascuna delle seguenti funzioni dire se esistono dei punti x_0 nei quali la retta tangente al grafico esiste ed è orizzontale:

$$x^2 - 4x + 5, \quad x^2 + \frac{1}{x}, \quad x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \sqrt{x(1-x)}.$$

Esercizio 6 Dire dove le funzioni

$$f(x) := x|x|, \quad g(x) := e^{-|x|}$$

sono continue e dove sono derivabili.

Esercizio 7 Facendo uso delle regole di calcolo, dire dove sono derivabili e determinare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}, \quad \sin(\log x), \quad (1 + e^x)^3, \quad (\sin x)^{\cos x}.$$

Esercizio 8 Sia $g(x) := 4x(1 - |x|)$, $x \in [-1, 1]$ ed $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando periodicamente con periodo 2 g a tutto $\mathbb{R}$. Mostrare che f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la sua derivata è continua.

Esercizio 9 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} & x^6 - 2x^3 + 6x, \quad \frac{4}{x^3} + 5x^4 - \frac{7}{x^5} + \frac{1}{x^8}, \quad \left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^4, \quad \left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5. \\ & \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}, \quad \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x \sqrt{x}}} \\ & (\sin x)^3 - 3 \sin x, \quad \frac{x^2}{\cos x}, \quad \tan x + \frac{1}{\cos x}, \quad x^2 \tan(x^2 + x + 1), \quad \frac{x^2}{1 + \cos x} + \tan \frac{x}{2}. \\ & x \arcsin x, \quad \sin(2 \arctan x), \quad \frac{x}{1+x^2} - \arctan x, \quad \arcsin(\sin x), \quad \arctan \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad \arctan \left(x - \sqrt{1+x^2}\right) \\ & x(\log x - 1), \quad \log \left(\tan \frac{x}{2}\right), \quad \log \log x, \quad x \tan x + \log(\cos x), \quad \arctan \left(\log \frac{1}{x^2}\right) \\ & e^{e^x}, \quad x e^{1 - \cos x}, \quad 2^{\frac{x}{\log x}}, \quad \log(\sinh x - 1), \quad \cosh(\sinh x), \quad \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{x}}}}, \quad \sqrt{\arctan \left(\sinh \frac{x}{3}\right)} \\ & x^x, \quad x^{x^x}, \quad (x^x)^x, \quad \sin(x^{\log x}), \quad (\cos x)^{\frac{1}{x}}, \quad (x^2 + 2)^{\sin x}. \end{aligned}$$