

## ESERCIZI SU PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

**Esercizio 1** Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare: dominio, comportamento agli estremi del dominio, zeri e segno, continuità, derivabilità, monotonia, eventuali estremanti (specificando se sono locali o globali), concavità ed eventuali punti di flesso. Con le informazioni così ottenute tracciare un grafico della funzione con la maggior precisione possibile.

$$f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3.$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4}.$$

$$f(x) = x^2 \log |x|.$$

$$f(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}.$$

$$f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3.$$

$$f(x) = 1 - e^{2x \log |x|}.$$

**Esercizio 2** Per le seguenti funzioni determinare: dominio, comportamento agli estremi, continuità e derivabilità, monotonia, eventuali estremanti (specificandone la natura), concavità compresi eventuali punti di flesso. Dedurre il segno della funzione e tracciarne un grafico con la maggior precisione possibile.

$$f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$f(x) = 2x + \arctan \frac{x}{x^2 - 1}.$$

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\sinh x - 1} + 2x.$$

$$f(x) = \tan x = \log |\cos x| - x.$$

**Esercizio 3** Studiare il segno delle seguenti funzioni

$$f(x) = \log x - \frac{x-1}{x}.$$

$$f(x) = 2x \log x + 1 - x^2.$$

$$f(x) = e^x - 1 - x - x^2..$$

**Esercizio 4** Determinare il primo termine non nullo dello sviluppo asintotico in  $x = 0$  per ciascuna delle seguenti funzioni:

$$\frac{x}{x-1}, \quad \sin(2x) - 2 \sin x, \quad \tan x + x^2, \quad e^x - \sin x - 1, \quad (\sin x)^2 - (1 - \cos x)^2.$$

$$e^x - \sin x - 1, x^3 + \sqrt[3]{x}, (\sin x)^2 - (1 - \cos x)^2.$$

**Esercizio 5** Ricorrendo agli sviluppi elementari, scrivere lo sviluppo asintotico arrestato al quarto ordine delle seguenti funzioni per  $x \rightarrow 0$ :

$$e^x - \sin x - 1, (\sinh x)^2, (1 - \cosh x) \sinh x.$$

**Esercizio 6** Utilizzando gli sviluppi asintotici, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{1 + x^2 - e^{x^2} + (\sin x)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(\sin x)^3} - 1 - (\tan x)^3}{x^3 (e^{x^2} - e^{(\sin x)^2})}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - x^2 \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

**Esercizio 7** Utilizzando gli sviluppi asintotici, calcolare i seguenti limiti (dopo averne classificato la forma indeterminata):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \arctan x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x + \frac{x^2}{2}}{(\tan x)^3 + x^5}$$

**Esercizio 8** Sia  $\alpha > 0$ . Dire se esistono e calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^\alpha}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + x^\alpha) - \sin x}{1 - \cos(x^\alpha)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^\alpha} - 1 - x^\alpha - \frac{1}{2} \sin x}{\ln(1 + x) - x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x^\alpha) - e^x}{x \log(1 + x^\alpha) - x^\alpha}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \arctan(x^2)}{e^{x^2} - \cos(x^{2\alpha})}.$$

**Esercizio 9** Calcolare, al variare del parametro  $\alpha > 0$ , i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha) - \sin(x^8)}{e^{x^{2\alpha}} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^\alpha} - 1 + x \log x}{\sin(x^{2\alpha}) + 1 - \cos(x^2)}$$

**Esercizio 10** Di ciascuna delle seguenti forme di indecisione dire se è possibile applicare le regole di Hôpital ed, in tal caso, calcolarne il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2x) - \cos x}{x^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(\log x)^2}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

**Esercizio 11** Classificare l'eventuale forma indeterminata e calcolare, applicando correttamente le regole di Hôpital, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - (\sin x)^2}{x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log \cos x}{x \sin x}$$