Esercizi su Integrali Generalizzati

Esercizio 1 Dire, applicando la definizione, se i seguenti integrali generalizzati esistono e determinarne il relativo valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx,\quad \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2(1+x^2)}\,dx,\quad \int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-e^5}}\,dx.$$

Esercizio 2 Stabilire se il seguente integrale generalizzato esiste o meno:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+x)}{\sin x}\,dx,$$

Esercizio 3 Sia $\alpha > 0$ e

$$f_\alpha(x) := (x-1)\arctan\frac{1}{x^\alpha},\quad x \in I :=]0,+\infty[.$$

i) Determinare le primitive di f_1 ($\alpha = 1$) su I.

ii) Servirsi del risultato precedente per dire se esiste

$$\int_0^1 f(x)\,dx,$$

e determinarne, in tal caso, il valore.

iii) Dire per quali $\alpha > 0$ esiste finito

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx.$$

Esercizio 4 Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che esista

$$\int_0^1 \frac{(\arctan x)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(1-\sqrt{x})^\alpha}\,dx,$$

e calcolarne il valore per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 5 Stabilire per quali valori $\alpha > 0$ è convergono i seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^{\pi^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2-x^2)^\alpha}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{x^\alpha(1+x)^{2\alpha}}.$$

Del secondo, calcolarlne il valore per $\alpha = 1$.

Esercizio 6 Determinare gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan(x^\alpha)}{(1-\cos x)^\beta}\,dx$$

sia convergente.

Esercizio 7 Sia
$$f_\alpha(x) := e^x \arctan \frac{1}{(e^x-1)^\alpha}, \ x \in\in]0, +\infty[.$$

i) Calcolare le primitive di $f_{1/2}$ (cioè $\alpha = \frac{1}{2}$) su $]0, +\infty[$.

ii) Calcolare, se esiste
$$\int_0^1 e^x \arctan \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \ dx.$$

iii) Determinare gli $\alpha > 0$ tali che f_α sia integrabile in $x = 0+$ e quelli per cui è integrabile a $+\infty$. Esistono dei valori di α per i quali
$$\exists \int_0^{+\infty} f_\alpha(x) \ dx \ ?$$

Esercizio 8 Sia
$$f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha} \log(1 + \sqrt[3]{x}), \quad x \in [0, +\infty[.$$

i) Calcolare le primitive di f_0 (cioè $\alpha = 0$) su $]0, +\infty[$.

ii) Determinare gli $\alpha > 0$ tali che f_α sia integrabile in $0+$.

iii) ($\star$) Determinare gli $\alpha > 0$ tale che f_α sia integrabile a $+\infty$.