Primo appello 2002/2003 - Tema 4

Esercizio 1

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \arctan\left|\frac{1}{\sinh x}\right| - \frac{\sinh x}{3}\,,$$

[Dominio, limiti ed eventuali asintoti, continuità con eventuali prolungamenti, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico; **facoltativo: derivata seconda, convessità, concavità e flessi**]

Svolgimento

Dominio: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Limiti ed eventuali asintoti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \frac{\pi}{2}\,,\\
\lim_{x\to +\infty} f(x) &= -\infty\,,\\
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= +\infty\,,\\
\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= -\infty\,,\\
\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= -\infty\,.
\end{aligned}$$

Ne consegue che

1. nel punto $x_0 = 0$ f è prolungabile per continuità;
2. f non presenta asintoti di alcun genere.

Da ora in poi chiamo ancora f la funzione prolungata per continuità in $x_0 = 0$.
Derivata prima: Per $x \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= D\left[\frac{\pi}{2} - \arctan|\sinh x| - \frac{\sinh x}{3}\right]\\
&= -\frac{1}{1+\sinh^2 x}\operatorname{sgn}(\sinh x)\cosh x - \frac{\cosh x}{3}\\
&= -\frac{\operatorname{sgn}(\sinh x)}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{3}\\
&= -\frac{1}{3\cosh x}\left[3\operatorname{sgn}(\sinh x) + \cosh^2 x\right]
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{2}{3}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{4}{3}\,,$$

e quindi $x_0 = 0$ è punto angoloso per f.
Segno di f': $f'(x) \geq 0$ se e solo se $3\,\text{sgn}(\sinh x) + \cosh^2 x \leq 0$ e quindi se e solo se

$$\cosh^2 x \leq 3 \quad \text{e} \quad x < 0 \quad \Rightarrow \quad -\text{settcosh}\,\sqrt{3} \leq x < 0\,.$$

Quindi

$$\begin{array}{ll} f \text{ è crescente in} & [-\text{settcosh}\,\sqrt{3}, 0] \\ f \text{ è decrescente in} &]-\infty, -\text{settcosh}\,\sqrt{3}] \;\cup\; [0, +\infty[\,, \end{array}$$

e quindi ha un punto di **massimo relativo** in $x_0 = 0$ e un punto di **minimo relativo** in $x_0 = -\text{settcosh}\,\sqrt{3}$.
Derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -D\left[\frac{\text{sgn}(\sinh x)}{\cosh x} + \frac{\cosh x}{3}\right] \\ &= \frac{\text{sgn}(\sinh x)}{\cosh^2 x}\sinh x - \frac{\sinh x}{3} \\ &= \frac{\sinh x}{3\cosh^2 x}\left[3\,\text{sgn}(\sinh x) - \cosh^2 x\right]. \end{aligned}$$

Poiché per $x < 0$ si ha $f''(x) > 0$, ne consegue che

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cosh^2 x \leq 3 \quad \text{e} \quad x > 0\,,$$

da cui

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq \text{settcosh}\,\sqrt{3}\,.$$

Quindi

$$\begin{array}{lll} f & \text{è convessa in} &]-\infty, 0[\,\cup\,]0, \text{settcosh}\,\sqrt{3}[\,, \\ f & \text{è convessa in} &]\text{settcosh}\,\sqrt{3}, +\infty[\,, \\ f & \text{ha un punto di flesso in} & 0 \quad \text{e} \quad \text{settcosh}\,\sqrt{3}\,. \end{array}$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{9(z + \bar{z} + 4)}{|z|}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

1. Calcolare $f(1 + \sqrt{3}i)$.
2. Calcolare, esprimere in forma algebrica e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione
$$z^3 = f(1 + \sqrt{3}i)$$

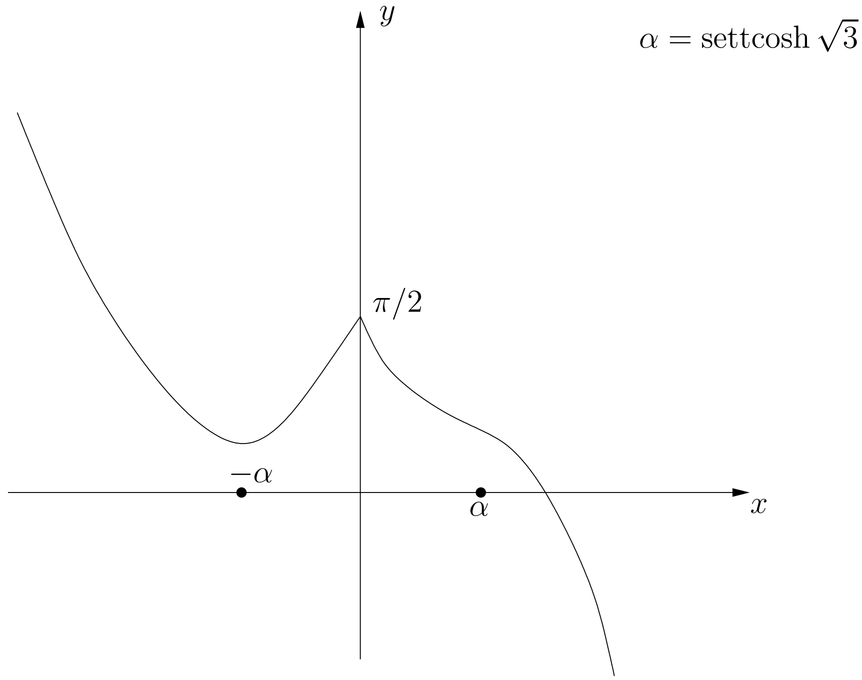

Figura 1: Esercizio 1

Svolgimento

$$f(1+\sqrt{3}i) = 9\frac{1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i+4}{2} = 27\,.$$

Quindi bisogna risolvere

$$z^3 = 27\,,$$

che ha soluzioni

$$\begin{aligned} z_1 &= 3\,, \\ z_2 &= 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\,, \\ z_3 &= 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x} - \frac{2\arctan x}{(e^{2x}-1)^2}\right)\,.$$

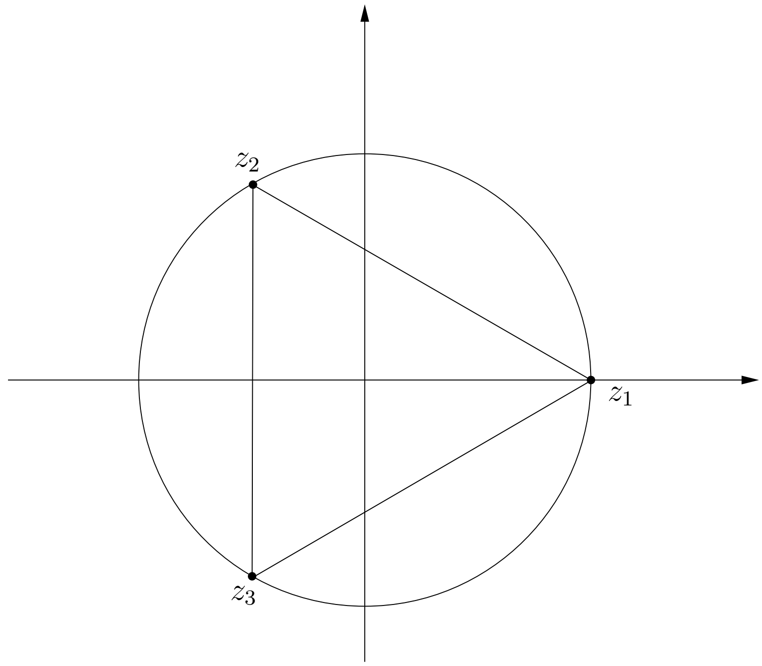

Figura 2: Esercizio 2

Svolgimento

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{2\arctan x}{(e^{2x}-1)^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)^2-4x\arctan x}{2x(e^{2x}-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(2x+2x^2+o(x^2)\right)^2-4x(x+o(x^2))}{2x(2x+o(x))^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4x^2+8x^3+o(x^3)-4x^2+o(x^3)}{8x^3+o(x^3)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{8x^3}{8x^3}=1\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_0^2 |x(e^x-e)|\;dx\,.$$

Svolgimento

Si ha

$$\int_0^2 |x(e^x-e)|\;dx=\int_0^1 x(e-e^x)\;dx+\int_1^2 x(e^x-e)\;dx\,.$$

Calcoliamo una primitiva di $x \mapsto x(e^x - e)$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\int x(e^x - e)\ dx &= \int xe^x - \frac{e}{2}x^2 \\ &= xe^x - \int e^x\ dx - \frac{e}{2}x^2 \\ &= xe^x - e^x - \frac{e}{2}x^2\,.\end{aligned}$$

Quindi l'integrale cercato vale

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x(e^x - e)|\ dx &= \left[\frac{e}{2}x^2 + e^x - xe^x\right]_0^1 + \left[xe^x - e^x - \frac{e}{2}x^2\right]_1^2 \\ &= \left[\frac{e}{2} + e - e - 1\right] + \left[2e^2 - e^2 - \frac{e}{2}4 - e + e + \frac{e}{2}\right] \\ &= e^2 - e - 1\,.\end{aligned}$$