Secondo appello 2002/2003 - Tema 1

Esercizio 1

Studiare la funzione definita da

$$f(x) = 2(x-1) + \log|x^2 - 2x|$$

[Dominio, limiti ed eventuali asintoti, continuità con eventuali prolungamenti, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, derivata seconda, convessità, concavità e flessi, abbozzo del grafico]

Svolgimento

Dominio: Deve essere $x^2 - 2x \neq 0$ e dunque $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

f risulta essere continua in tutti i punti di $\mathcal{D}$ perchè somma di funzioni continue.

Limiti ed eventuali asintoti:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty\,,\\
&\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty\,,\\
&\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty\,,\\
&\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2\,,\\
&\lim_{x\to +\infty} [f(x) - 2x] = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2\,,\\
&\lim_{x\to -\infty} [f(x) - 2x] = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Ne consegue che

1. f ha le rette di equazione $x = 0$ e $x = 2$ come asintoti verticali;

2. f non presenta orizzontali o obliqui.

Derivata prima: f è derivabile in tutto il suo dominio perché somma di funzioni derivabili. Per $x \in \mathcal{D}$ si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= D\left[2(x-1) + \log|x^2 - 2x|\right]\\
&= 2 + \frac{1}{x^2 - 2x}(2x - 2)\\
&= 2\frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}\,.
\end{aligned}$$

Segno di f': $f'(x) \geq 0$ se e solo se
$$\frac{x^2-x-1}{x^2-2x} \geq 0\,.$$
Si ha
$$\begin{aligned} x^2-x-1 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \\ x^2-2x \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq 0 \quad \text{o} \quad x \geq 2\,. \end{aligned}$$
Quindi
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad 0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x > 2\,, \\ f'(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0 \quad \text{o} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2\,, \\ f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \end{aligned}$$
da cui si deduce che

- f è **strettamente crescente** negli intervalli
$$\left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\,, \qquad \left]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\,, \qquad]2,+\infty[\,;$$
- f è **strettamente decrescente** negli intervalli
$$\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right[\,, \qquad \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right[\,;$$
- f ha **punti di massimo relativo** in
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,, \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;$$
- f non ha **punti di minimo relativo**.

Derivata seconda:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2D\frac{x^2-x-1}{x^2-2x} \\ &= 2\frac{(2x-1)(x^2-2x)-(2x-2)(x^2-x-1)}{(x^2-2x)^2} \\ &= -2\frac{x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}\,. \end{aligned}$$
Poiché il polinomio x^2-2x+2 ha radici complesse coniugate, ne consegue che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$ e quindi che f è strettamente concava negli intervalli
$$]-\infty, 0[\qquad]0,2[\qquad]2,+\infty[\,.$$

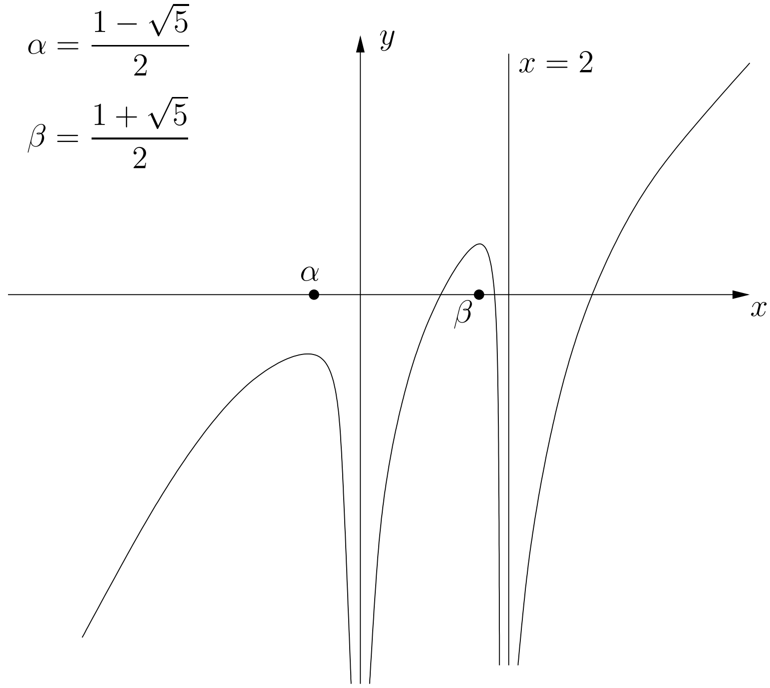

Figura 1: Grafico della funzione dell'esercizio 1

Esercizio 2

Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{16-x^4} - \dfrac{2x}{4+x^2}y, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Svolgimento

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Una primitiva di $2x/(4+x^2)$ si calcola facilmente ed è $\log(4+x^2)$. Quindi, moltiplicando ambo i membri dell'equazione per $4+x^2$ si ottiene

$$(4+x^2)y'(x) + 2xy(x) = \frac{1}{4-x^2}\,,$$

da cui

$$\frac{d}{dt}[(4+t^2)y(t)] = \frac{1}{4-t^2}\,.$$

Integrando ambo i mebri tra 0 e x si ottiene

$$(4+t^2)y(t)\Big|_0^x = \int_0^x \frac{1}{4-t^2}\,dt\,. \tag{1}$$

Poiché

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{4-t^2}\,dt &= \frac{1}{4}\int_0^x \left[\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2+t}\right]\,dt \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\Bigg|_0^x \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\,,\end{aligned}$$

sfruttando la condizione iniziale $y(0)=2$, da (1) si ottiene

$$(4+x^2)y(x)-8=\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\,,$$

da cui

$$y(x)=\frac{8}{4+x^2}+\frac{1}{4(4+x^2)}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\,,$$

che è la soluzione cercata del problema di Cauchy.

Esercizio 3

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{1/n}(\cosh\frac{1}{n^3}-1)}{\sin\frac{1}{n^{4/3}}-\frac{1}{n^{4/3}}}$$

converge assolutamente e se converge (semplicemente).

Svolgimento

Stabiliamo innanzitutto se la serie converge assolutamente, e quindi dobbiamo studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{e^{1/n}(\cosh\frac{1}{n^3}-1)}{\sin\frac{1}{n^{4/3}}-\frac{1}{n^{4/3}}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{1/n}(\cosh\frac{1}{n^3}-1)}{\frac{1}{n^{4/3}}-\sin\frac{1}{n^{4/3}}}\,, \tag{2}$$

e chiamiamo a_n il termine generale di questa serie. Cerchiamo di sfruttare il criterio del confronto. Si osservi che

$$\begin{aligned}&e^{1/n}\to 1 && \text{per}\quad n\to+\infty\,,\\ &\cosh\frac{1}{n^3}-1=\frac{1}{2n^6}+o(1/n^6) && \text{per}\quad n\to+\infty\,,\\ &\frac{1}{n^{4/3}}-\sin\frac{1}{n^{4/3}}=\frac{1}{6n^4}+o(1/n^4) && \text{per}\quad n\to+\infty\,.\end{aligned}$$

Quindi, confrontando la serie in (2) con la serie di termine generale $1/n^2$, che è convergente, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{1/n^2}=3\,,$$

numero reale non nullo. Allora il criterio del confronto asintotico ci assicura che la nostra serie di partenza è assolutamente convergente, e quindi anche semplicemente convergente.

Esercizio 4

Determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z+1| = |z-i| \tag{3}$$

e disegnarne l'insieme nel piano di Gauss.

Svolgimento

L'esercizio si può svolgere in due modi.

1. l'equazione (3) è soddisfatta da tutti i numeri complessi z che sul piano di Gauss sono equidistanti da -1 e i, e quindi sono tutti e soli i numeri complessi che sul piano di Gauss stanno sull'asse del segmento che unisce -1 e i, e dunque la bisettrice del secondo e quarto quadrante (vedi figura 2). Si ottiene

$$|z+1| = |z-i| \qquad \Leftrightarrow \qquad z = x - ix, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

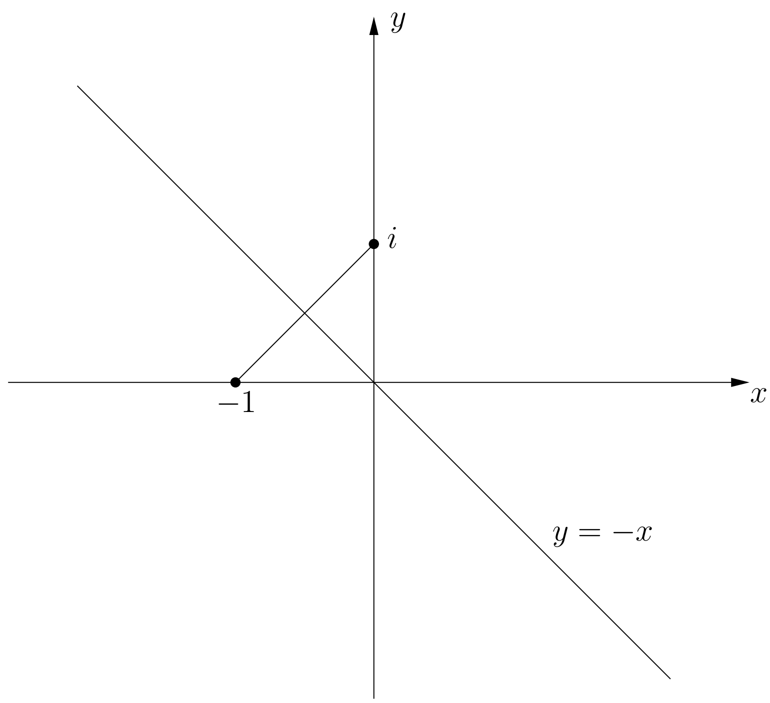

Figura 2: Esercizio 4

2. Posto $z = x + iy$ e osservato che z soddisfa (3) se e solo se $|z+1|^2 = |z-i|^2$, si ottiene che deve essere

$$|(x+1) + iy|^2 = |x + i(y-1)|^2\,,$$

da cui

$$(x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \, .$$

Facendo i conti si ottiene $y = -x$, da cui $z = x - ix$, $x \in \mathbb{R}$. Naturalmente, sul piano di Gauss l'equazione $y = -x$ descrive la bisettrice del secondo e quarto quadrante (vedi figura 2).