

Terzo appello 2002/2003 - Tema 1

Esercizio 1

Studiare la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \sqrt{\left| \frac{5-x}{3+x} \right|} & \text{se } x \neq -3 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = -3. \end{cases}$$

[Limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, abbozzo del grafico]

Svolgimento

Limiti ed eventuali asintoti:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ne consegue che

1. f ha la retta di equazione $y = \pi/4$ come asintoto orizzontale;
2. f non presenta asintoti verticali o obliqui.

Continuità: In $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ f è composizione di funzioni continue ed è quindi continua. Poiché $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \pi/2 = f(-3)$, f è continua anche in $x = -3$ e dunque $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Inoltre si osservi che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = 5$.

Derivata prima: f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-3, 5\}$ perché composizione di funzioni derivabili. Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 5\}$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= D \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\left| \frac{5-x}{3+x} \right|} \right] \\ &= \frac{1}{1 + \left| \frac{5-x}{3+x} \right|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\left| \frac{5-x}{3+x} \right|}} \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{5-x}{3+x} \right) \cdot \frac{-8}{(3+x)^2} \\ &= -\frac{1}{|3+x| + |5-x|} \frac{4}{\sqrt{|5-x||3+x|}} \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{5-x}{3+x} \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Da questo si deduce che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f'(x) &= +\infty & \lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f'(x) &= -\infty & \lim_{x \rightarrow 5^+} f'(x) &= +\infty, \end{aligned}$$

e quindi in $x = -3$ e in $x = 5$ f presenta delle cuspidi.

Segno di f' : da (1) si deduce che $f'(x) \geq 0$ se e solo se

$$\frac{5-x}{3+x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \quad \text{o} \quad x > 5, .$$

Quindi

- f è **strettamente crescente** negli intervalli $] -\infty, -3[$ e $]5, +\infty[$;
- f è **strettamente decrescente** nell'intervallo $] -3, 5[$;
- f ha un **punto di massimo assoluto** in $x = -3$ e non presenta altri punti di massimo;
- f ha un **punto di minimo assoluto** in $x = 5$ e non presenta altri punti di minimo.

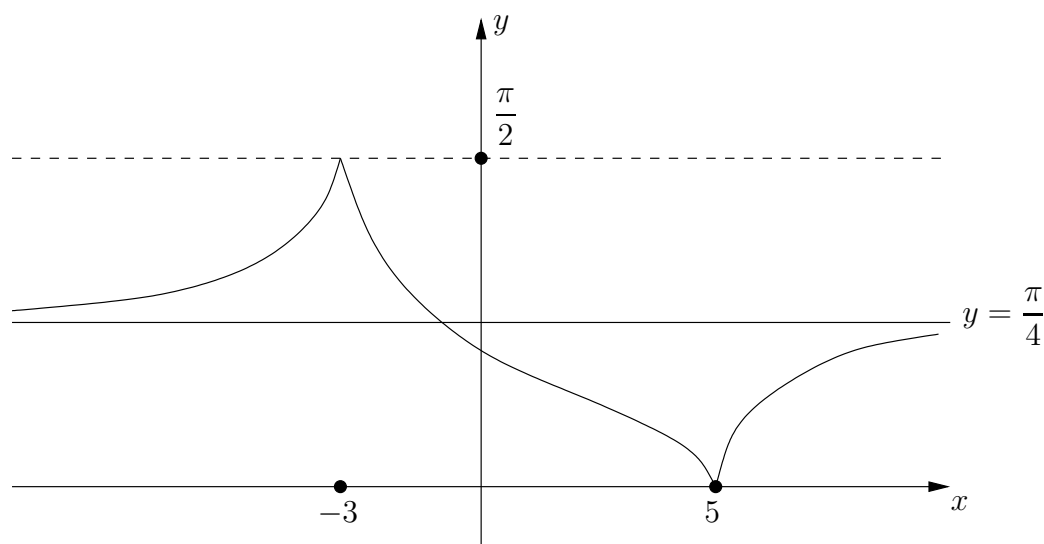


Figura 1: Grafico della funzione dell'esercizio 1

Esercizio 2

Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Svolgimento

L'equazione differenziale

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}, \quad (3)$$

è lineare del secondo ordine non omogenea. Il suo integrale generale $y = y(x)$ è la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata,

$$y'' - 3y' - 4y = 0, \quad (4)$$

e di una soluzione particolare $x \mapsto \tilde{y}(x)$. L'integrale generale di (4) si trova a partire dalle soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

che sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$. L'integrale generale di (3) allora ha la forma

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{4x} + \tilde{y}(x), \quad (5)$$

con A e B costanti arbitrarie. Per calcolare $\tilde{y}(x)$, osserviamo che -1 è soluzione dell'equazione caratteristica, e dunque $\tilde{y}(x)$ possiamo cercarla fra le funzioni della forma $x \mapsto \alpha xe^{-x}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Per trovare α , posto $\tilde{y}(x) = \alpha xe^{-x}$, imponiamo che essa sia soluzione di (3). Poichè

$$\tilde{y}'(x) = \alpha e^{-x}(1 - x), \quad \tilde{y}''(x) = \alpha e^{-x}(x - 2),$$

sostituendo in (3) si ottiene che deve essere

$$[\alpha e^{-x}(x - 2)] - 3[\alpha e^{-x}(1 - x)] - 4\alpha xe^{-x} = e^{-x},$$

da cui si ottiene $\alpha = -1/5$. Da (5) si ha che l'integrale generale cercato è

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{4x} - \frac{1}{5}xe^{-x}.$$

Per calcolare le costanti A e B dobbiamo imporre che siano soddisfatte le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Si ha

$$y(0) = A + B$$

$$y'(x) = -Ae^{-x} + 4Be^{4x} - \frac{1}{5}e^{-x}(1 - x) \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -A + 4B - \frac{1}{5},$$

da cui si ottiene che deve essere

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ -A + 4B - \frac{1}{5} = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova $A = 19/25$ e $B = 6/25$. La soluzione del problema di Cauchy (2) è dunque

$$y(x) = \frac{19}{25}e^{-x} + \frac{6}{25}e^{4x} - \frac{1}{5}xe^{-x}.$$

Esercizio 3

a) Calcolare una primitiva della funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)\sqrt{x}}.$$

b) Calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$.

c) Dire se

$$\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$$

converge e, in caso affermativo, calcolarlo.

Svolgimento

a) Per calcolare una primitiva di f procediamo per sostituzione in modo da ricondurci al calcolo di una primitiva di una funzione razionale fratta. Si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2x-1)\sqrt{x}} \, dx &= \int \frac{2t}{(2t^2-1)t} \, dt \\ &\downarrow \\ &t = \sqrt{x} \\ &= \int \left[\frac{1}{\sqrt{2}t-1} - \frac{1}{\sqrt{2}t+1} \right] \, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\log |\sqrt{2}t-1| - \log |\sqrt{2}t+1|] + c \\ &\downarrow \\ &t = \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{2x}+1} \right| + c, \end{aligned}$$

e quindi una primitiva di f è data dalla funzione

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{2x}+1} \right|. \quad (6)$$

b) Ricordiamo che f ha ordine di infinitesimo α per $x \rightarrow +\infty$ se e solo se il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(2x-1)\sqrt{x}}$$

esiste finito e non nullo. Poiché per $x \rightarrow +\infty$ vale

$$(2x-1)\sqrt{x} = 2x^{3/2} - x^{1/2} = 2x^{3/2} + o(x^{3/2}),$$

si ottiene che per $\alpha = 3/2$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{(2x-1)\sqrt{x}} = \frac{1}{2},$$

per cui l'ordine di infinitesimo cercato è $3/2$.

- c) Sfruttando quanto fatto al punto b), si può usare il teorema del confronto asintotico, confrontando f con la funzione $g : x \mapsto 1/x^{3/2}$, la quale ha integrale convergente nell'intervallo $]1, +\infty[$. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2},$$

anche l'integrale di f nell'intervallo $]1, +\infty[$ converge. Per calcolarlo, sfruttiamo la primitiva F di f trovata in (6):

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) \, dx &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} f(x) \, dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} [F(\omega) - F(1)] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log \left| \frac{\sqrt{2\omega} - 1}{\sqrt{2\omega} + 1} \right| - \log \left| \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right| \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right|. \end{aligned}$$