Quarto appello 2002/2003 - Tema 2

Esercizio 1

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,(e^x - 3) - \log|e^x - 1|\,.$$

[Dominio, eventuali simmetrie, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità ed eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo e assoluto, abbozzo del grafico].

Svolgimento

Dominio: deve essere $|e^x - 1| \neq 0$, da cui $x \neq 0$. Quindi il dominio $\mathcal{D}$ di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Eventuali simmetrie:

$$f(-x) = 2\,\mathrm{arctg}\,(e^{-x} - 3) + \log|e^{-x} - 1| \neq \pm f(x)\,,$$

e quindi il grafico di f non presenta simmetrie rispetto all'origine degli assi o all'asse delle ordinate.
Limiti ed eventuali asintoti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,,\\
\lim_{x\to +\infty} f(x) &= -\infty\,,\\
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= 2\,\mathrm{arctg}\,(-3) - \log 1 = -2\,\mathrm{arctg}\,3\,,
\end{aligned}$$

e quindi

1. f ha la retta di equazione $x = 0$ come asintoto verticale;
2. f ha la retta di equazione $y = -2\,\mathrm{arctg}\,3$ come asintoto orizzontale a $-\infty$ (e dunque a $-\infty$ non ha asintoti obliqui);
3. f non presenta asintoti orizzontali a $+\infty$.

Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui a $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{2\,\mathrm{arctg}\,(e^x - 3) - \log|e^x(1 - e^{-x})|}{x}\\
&= \lim_{x\to +\infty} \left[2\frac{\mathrm{arctg}\,(e^x - 3)}{x} - \frac{\log e^x + \log|1 - e^{-x}|}{x}\right]\\
&= \lim_{x\to +\infty} \left[2\frac{\mathrm{arctg}\,(e^x - 3)}{x} - \frac{x + \log|1 - e^{-x}|}{x}\right]\\
&= -1\,.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\big[f(x)+x\big] &= \lim_{x\to+\infty}\big[2\operatorname{arctg}(e^x-3)-\log|e^x(1-e^{-x})|+x\big]\\
&= \lim_{x\to+\infty}\big[2\operatorname{arctg}(e^x-3)-\log e^x-\log|1-e^{-x}|+x\big]\\
&= 2\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}(e^x-3)-\lim_{x\to+\infty}\log|1-e^{-x}|\\
&= \pi\,.
\end{aligned}$$

Ne consegue che la retta di equazione $y=-x+\pi$ è asintoto obliquo per f a $+\infty$.

Continuità: In $\mathcal{D}$ f è composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ ed è quindi di classe $\mathcal{C}^1$ (in particolare, continua e derivabile).

Derivata prima: Abbiamo già osservato che f è derivabile in $\mathcal{D}$. Per $x\in\mathcal{D}$ si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= D\,[2\operatorname{arctg}(e^x-3)-\log|e^x-1|]\\
&= \frac{2e^x}{1+(e^x-3)^2}-\frac{e^x}{e^x-1} \qquad (1)\\
&= -\frac{e^x}{1+(e^x-3)^2}\cdot\frac{e^{2x}-8e^x+12}{e^x-1}\,.
\end{aligned}$$

Da questo si deduce che $f'(x)\geq 0$ se e solo se

$$\frac{e^{2x}-8e^x+12}{e^x-1}\leq 0\,. \qquad (2)$$

Poiché

$$\begin{aligned}
e^{2x}-8e^x+12\geq 0 \quad&\Leftrightarrow\quad e^x\leq 2 \quad\text{o}\quad e^x\geq 6 \quad\Leftrightarrow\quad x\leq\log 2 \quad\text{o}\quad x\geq\log 6\,,\\
e^x-1>0 \quad&\Leftrightarrow\quad x>0\,,
\end{aligned}$$

da (1) e (2) segue che

$$\begin{aligned}
f'(x)>0 \quad&\Leftrightarrow\quad x<0 \quad\text{o}\quad \log 2<x<\log 6\,,\\
f'(x)=0 \quad&\Leftrightarrow\quad x=\log 2 \quad\text{o}\quad x=\log 6\,.
\end{aligned}$$

Si deduce che

- f è **strettamente crescente** negli intervalli $]-\infty,0[$ e $]\log 2,\log 6[$;
- f è **strettamente decrescente** negli intervalli $]0,\log 2[$ e $]\log 6,+\infty[$;
- f ha **un punto di massimo relativo** in $x=\log 6$ e non presenta altri punti di massimo; inoltre

$$f(\log 6)=2\operatorname{arctg}3-\log 5>2\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\log 5=\frac{2}{3}\pi-\log 5>2-\log 5>0\,;$$

- f ha **un punto di minimo relativo** in $x = \log 2$ e non presenta altri punti di minimo; inoltre
$$f(\log 2) = 2 \operatorname{arctg}(-1) - \log 1 = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Per disegnare un abbozzo del grafico di f è utile osservare che

1. $f(\log 6) < \pi - \log 6$. Infatti, sfruttando il fatto che
$$\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} \quad \forall y \neq 0\,,$$
si ottiene
$$\begin{aligned} f(\log 6) + \log 6 - \pi = &\ 2 \operatorname{arctg} 3 - \log 5 + \log 6 - \pi \\ = &\ -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \log\left(1 + \frac{1}{5}\right)\,. \end{aligned} \tag{3}$$
Dalla formula di Taylor con il resto di Lagrange arrestata al primo ordine, si ottiene
$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} y &= y + \frac{1}{2} D^2 \operatorname{arctg} y\Big|_{y=\xi} y^2 \\ &= y - \frac{1}{2}\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2} y^2\,, \end{aligned}$$
con ξ numero reale compreso tra 0 e y. Da questo si ottiene
$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} \cdot \frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2} \quad \xi \in]0, 1/3[\,. \tag{4}$$
Inoltre vale
$$\log(1+y) \leq y \qquad \Rightarrow \qquad \log\left(1 + \frac{1}{5}\right) \leq \frac{1}{5}\,.$$
Usando questo e (4) in (3) si ottiene
$$\begin{aligned} f(\log 6) + \log 6 - \pi &\leq -\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2} \\ &< -\frac{7}{15} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} < 0\,, \end{aligned}$$
dove si è struttato il fatto che se $\xi \in]0, 1/3[$ vale
$$\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2} < \frac{2}{3}\,.$$

2. Per x sufficientemente grande, $f(x) < -x + \pi$, cioè il grafico di f sta sotto l'asintoto

obliquo a $+\infty$. Infatti, in un intorno di $+\infty$ vale

$$\begin{aligned}
f(x) + x - \pi &= 2\,\mathrm{arctg}\,(e^x - 3) - \log(1 - e^{-x}) - \pi \\
&= -2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{e^x - 3} - \log(1 - e^{-x}) \\
&= -2\frac{1}{e^x - 3} + e^{-x} + o(e^{-x}) \\
&= -\frac{1 + 3e^{-x}}{e^x - 3} + o(e^{-x}) \\
&= -\frac{1}{e^x - 3} + o(e^{-x}) \\
&< 0\,.
\end{aligned}$$

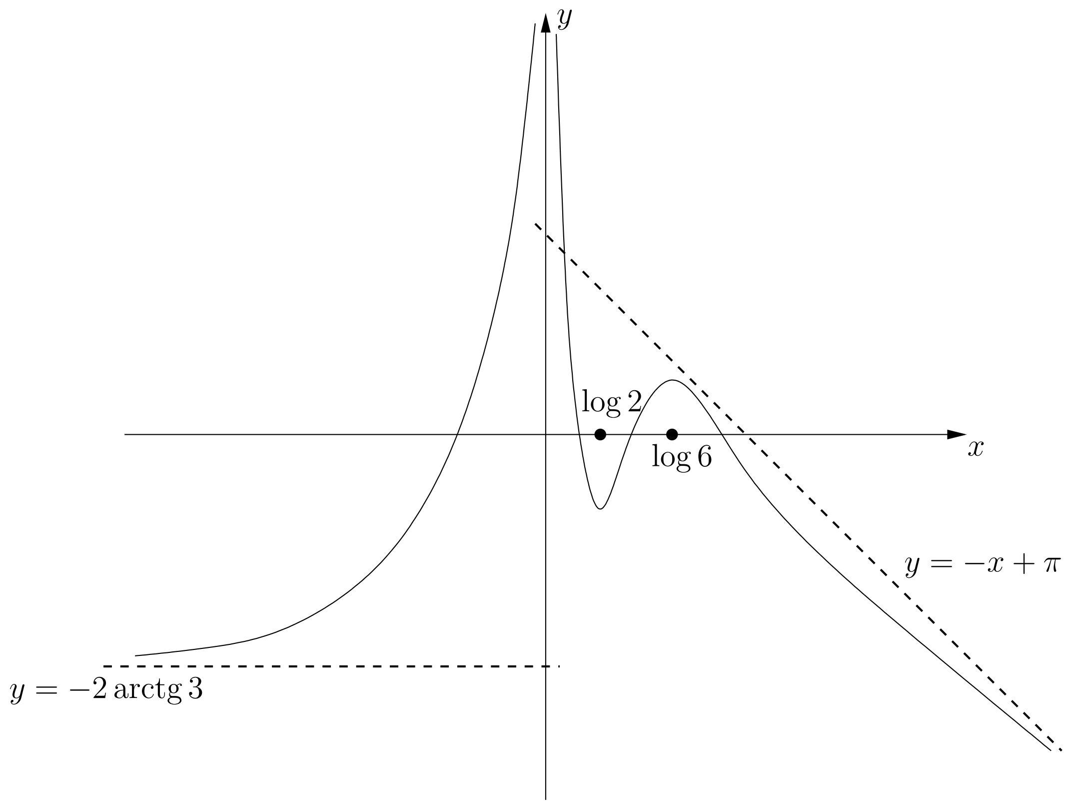

Figura 1: Grafico della funzione dell'esercizio 1

Esercizio 2

Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ in modo che $z_0 = i$ sia radice del polinomio

$$P(z) = z^3 - (2 - i)z^2 + \lambda z - 4\,.$$

Per tale valore di λ trovare tutte le radici di $P(z)$ in forma algebrica.

Svolgimento

Affinché z_0 sia radice di $P(z)$ deve essere $P(z_0) = 0$. Poiché

$$P(i) = -i + (2 - i) + \lambda i - 4\,,$$

si ricava

$$-i + (2 - i) + \lambda i - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2 - 2i\,.$$

Per tale valore di λ

$$P(z) = z^3 - (2 - i)z^2 + (2 - 2i)z - 4\,.$$

Per trovare le altre radici di P, sfruttiamo il Teorema di Ruffini che ci dice che $P(z)$ è divisibile per $z - i$. Fatta la divisione, si trova

$$P(z) = (z - i)\big[z^2 + 2(i - 1)z - 4i\big]\,.$$

Per trovare tutte le radici di $P(z)$ dobbiamo quindi risolvere

$$z^2 + 2(i - 1)z - 4i = 0\,.$$

Si ottiene

$$z_{1,2} = 1 - i \pm \sqrt{(i - 1)^2 + 4i} = 1 - i \pm \sqrt{2i}\,,$$

dove la radice quadrata è intesa in senso complesso. Poiché le radici quadrate di i sono

$$\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\,,$$

si ottiene

$$z_1 = 1 - i + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 - i + (1 + i) = 2\,,$$

$$z_2 = 1 - i - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 - i - (1 + i) = -2i\,.$$

Esercizio 3

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{n^{3/2}}\right) - \dfrac{1}{n^{3/2}}}{n\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)}$$

converge.

Svolgimento

Studiamo dapprima la convergenza assoluta, che implica quella semplice. Dobbiamo vedere se converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right)-\frac{1}{n^{3/2}}}{n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^{3/2}}-\log\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}\,, \tag{5}$$

dove si è usato che

$$x > \log(1+x) \quad \forall x > -1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{n^{3/2}}-\log\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right) > 0 \quad \forall n \geq 1\,.$$

Per studiare la convergenza di (5) utilizziamo il criterio asintotico del confronto. Poiché

$$\frac{1}{n^{3/2}}-\log\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$1-\cos\frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\,,$$

confrontiamo la serie (5) con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

Si ottiene, utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{3/2}}-\log\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}\cdot n^2 &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{n\left[\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}\cdot n^2\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1/2n}{1/2n}\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Grazie al criterio asintotico del confronto, si conclude che la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.