Primo compitino 2002/2003 - Tema 1

Esercizio 1

Siano $z_0 = 2 - i$ e

$$\mathcal{A} = \left\{ z \in \mathbb{C} : (z - z_0)^3 + 64 = 0 \right\}.$$

Trovare $\mathcal{A}$ e disegnarlo sul piano di Gauss.
Calcolare $\sup \left\{ \operatorname{Im} z : z \in \mathcal{A} \right\}$.

Svolgimento

$z \in \mathcal{A}$ se e solo se $(z - z_0)^3 = -64$, cioè se e solo se $z - z_0$ è radice terza di -64. Quindi il problema di trovare $\mathcal{A}$ si riconduce a calcolare le radici terze di -64. Una è $w_1 = -\sqrt[3]{64} = -4$, le altre stanno sul piano di Gauss sui vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 4, e quindi (vedi figura 1)

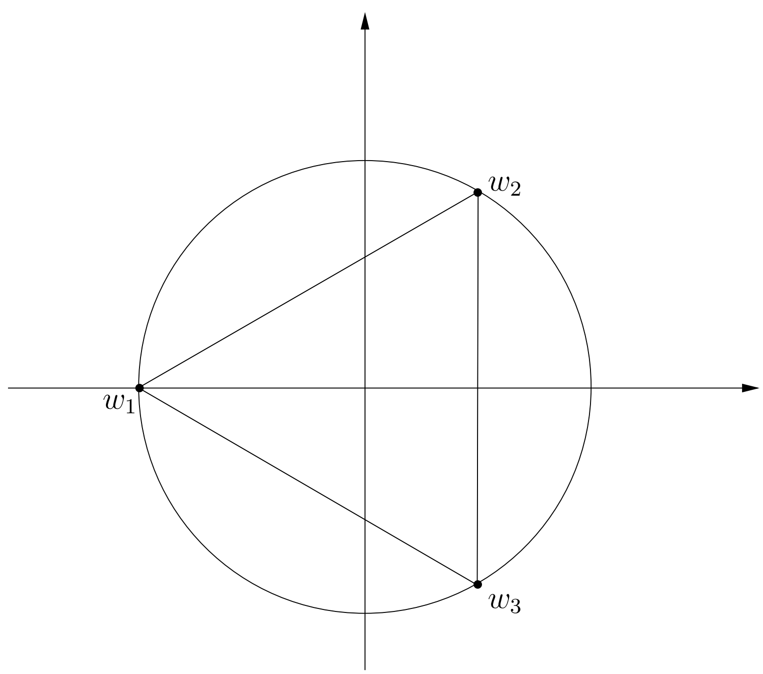

Figura 1: Esercizio 1

$$w_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i\,,$$
$$w_3 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2 - 2\sqrt{3}i\,.$$

Per trovare gli elementi di $\mathcal{A}$ bisogna traslare la circonferenza in figura 1 in $z_0 = 2 - 1$ (vedi figura 2) e si ottiene

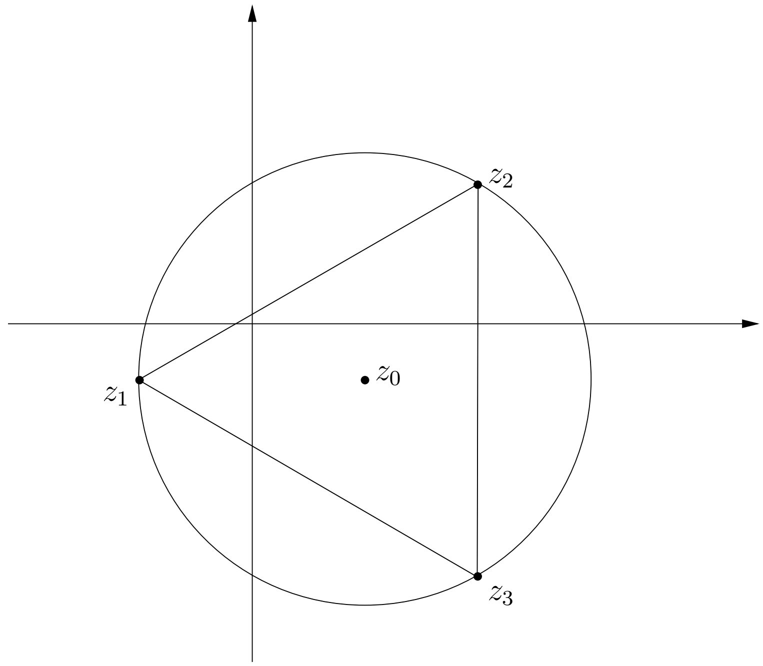

Figura 2: Esercizio 1

$$
\begin{aligned}
z_1 = w_1 + z_0 &= -2 - i\,, \\
z_2 = w_2 + z_0 &= 4 + i(2\sqrt{3} - 1)\,, \\
z_3 = w_3 + z_0 &= 4 - i(2\sqrt{3} + 1)\,.
\end{aligned}
$$

Si ottiene poi

$$\big\{\mathrm{Im}\, z : z \in \mathcal{A}\big\} = \big\{ -1, 2\sqrt{3} - 1, -2\sqrt{3} - 1\big\}\,,$$

che ammette come massimo $2\sqrt{3} - 1$ e dunque

$$\sup \big\{\mathrm{Im}\, z : z \in \mathcal{A}\big\} = \max \big\{\mathrm{Im}\, z : z \in \mathcal{A}\big\} = 2\sqrt{3} - 1\,.$$

Esercizio 2

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos\sqrt{x} + \log(1 + x^2)}{x \sin\sqrt{x} + e^x - 1}\,.$$

Svolgimento

Poiché

$$
\begin{aligned}
\cos y &= 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\,, \\
\log(1 + y) &= y + o(y)\,, \\
\sin y &= y + o(y)\,,
\end{aligned}
$$

valgono i seguenti sviluppi asintotici

$$\begin{aligned} 1-\cos\sqrt{x} &= \frac{x}{2}+o(x)\,, \\ \log(1+x^2) &= x^2+o(x^2)\,, \\ \sin\sqrt{x} &= \sqrt{x}+o(\sqrt{x})\,, \\ e^x-1 &= x+o(x)\,, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} 1-\cos\sqrt{x}+\log(1+x^2) &= \frac{x}{2}+o(x)+x^2+o(x^2) && = \frac{x}{2}+o(x)\,, \\ x\sin\sqrt{x}+e^x-1 &= x(\sqrt{x}+o(\sqrt{x}))+x+o(x) && = x+o(x)\,. \end{aligned}$$

Quindi, sfruttando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}+\log(1+x^2)}{x\sin\sqrt{x}+e^x-1} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x/2+o(x)}{x+o(x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x/2}{x} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Usando la definizione, verificare che

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{x+1} = 2\,.$$

Svolgimento

Bisogna verificare che

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M>0 : \text{se } x<-M \text{ e } x\neq -1 \text{ allora } \left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right|<\varepsilon\,. \tag{1}$$

Fissiamo $\varepsilon>0$. Dobbiamo trovare soluzioni della disequazione

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right|<\varepsilon \tag{2}$$

del tipo $x<-M$, con $M>0$, e dunque possiamo supporre $x+1<0$. Riscriviamo la disequazione (2) come

$$\left|-\frac{3}{x+1}\right|<\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{3}{x+1}<\varepsilon\,, \tag{3}$$

per l'osservazione fatta circa il segno di $x+1$. Da (3) si ottiene

$$\frac{3}{x+1}>-\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad x+1<-\frac{3}{\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad x<-\left(1+\frac{3}{\varepsilon}\right)\,,$$

e quindi (1) è verificata con

$$M = 1+\frac{3}{\varepsilon}\,.$$

Esercizio facoltativo

Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5\,.$$

Cosa si può dire sul segno di f?

Svolgimento

Per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno $\mathcal{U}$ di 1 tale che se $x \in \mathcal{U}$ e $x \neq 1$, allora $f(x)$ assume lo stesso segno del limite, cioè $f(x) > 0$.