

Secondo compitino 2002/2003 - Tema 4

Esercizio 1

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \arctan \left| \frac{1}{\sinh x} \right| - \frac{\sinh x}{3},$$

[Dominio, limiti ed eventuali asintoti, continuità con eventuali prolungamenti, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico; **facoltativo: derivata seconda, convessità, concavità e flessi**]

Svolgimento

Dominio: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Limiti ed eventuali asintoti:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= -\infty.\end{aligned}$$

Ne consegue che

1. nel punto $x_0 = 0$ f è prolungabile per continuità;
2. f non presenta asintoti di alcun genere.

Da ora in poi chiamo ancora f la funzione prolungata per continuità in $x_0 = 0$.

Derivata prima: Per $x \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned}f'(x) &= D \left[\frac{\pi}{2} - \arctan |\sinh x| - \frac{\sinh x}{3} \right] \\ &= -\frac{1}{1 + \sinh^2 x} \operatorname{sgn}(\sinh x) \cosh x - \frac{\cosh x}{3} \\ &= -\frac{\operatorname{sgn}(\sinh x)}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{3} \\ &= -\frac{1}{3 \cosh x} [3 \operatorname{sgn}(\sinh x) + \cosh^2 x] \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \frac{2}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{4}{3},\end{aligned}$$

e quindi $x_0 = 0$ è punto angoloso per f .

Segno di f' : $f'(x) \geq 0$ se e solo se $3 \operatorname{sgn}(\sinh x) + \cosh^2 x \leq 0$ e quindi se e solo se

$$\cosh^2 x \leq 3 \quad \text{e} \quad x < 0 \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{settcosh} \sqrt{3} \leq x < 0.$$

Quindi

$$f \text{ è crescente in } [-\operatorname{settcosh} \sqrt{3}, 0]$$

$$f \text{ è decrescente in }]-\infty, -\operatorname{settcosh} \sqrt{3}] \cup [0, +\infty[,$$

e quindi ha un punto di **massimo relativo** in $x_0 = 0$ e un punto di **minimo relativo** in $x_0 = -\operatorname{settcosh} \sqrt{3}$.

Derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -D \left[\frac{\operatorname{sgn}(\sinh x)}{\cosh x} + \frac{\cosh x}{3} \right] \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(\sinh x)}{\cosh^2 x} \sinh x - \frac{\sinh x}{3} \\ &= \frac{\sinh x}{3 \cosh^2 x} [3 \operatorname{sgn}(\sinh x) - \cosh^2 x]. \end{aligned}$$

Poiché per $x < 0$ si ha $f''(x) < 0$, ne consegue che

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cosh^2 x \leq 3 \quad \text{e} \quad x > 0,$$

da cui

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq \operatorname{settcosh} \sqrt{3}.$$

Quindi

$$f \text{ è concava in }]-\infty, 0[\cup]\operatorname{settcosh} \sqrt{3}, +\infty[,$$

$$f \text{ è convessa in }]0, \operatorname{settcosh} \sqrt{3}[,$$

$$f \text{ ha un punto di flesso in } 0 \text{ e } \operatorname{settcosh} \sqrt{3}.$$

Esercizio 2

Calcolare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1 + 16y^2}{x^2 - x - 6} \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

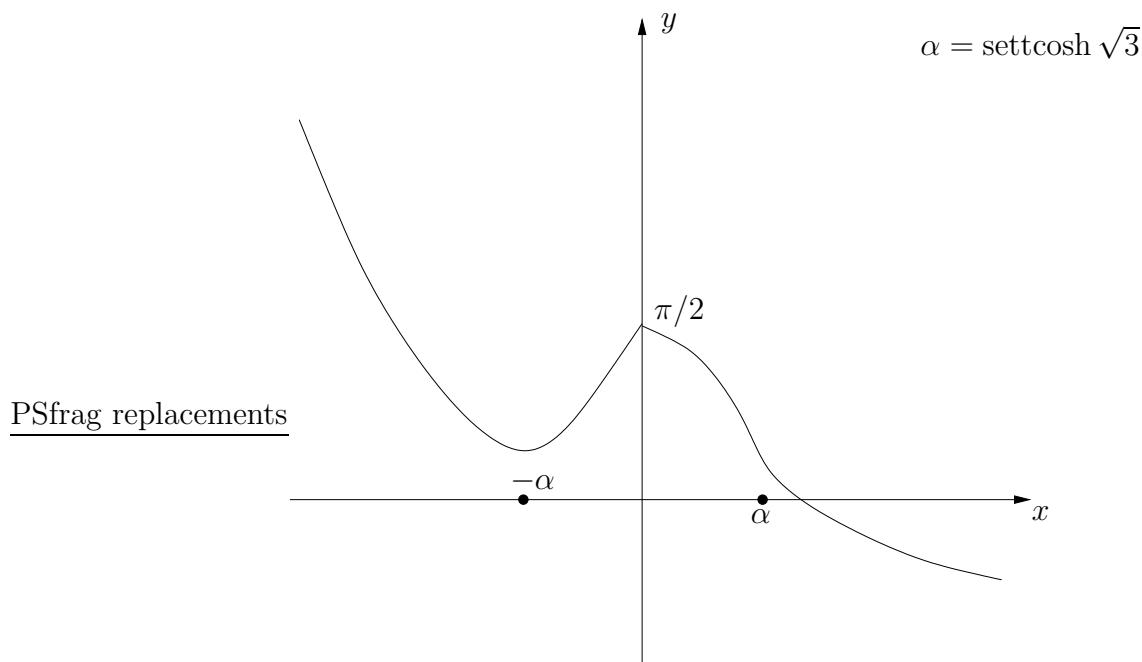


Figura 1: Esercizio 1

Svolgimento

Deve essere

$$\int \frac{1}{1 + 16y^2} dy = \int \frac{1}{x^2 - x - 6} dx.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + 16y^2} dy &= \frac{1}{4} \int \frac{4}{1 + (4y)^2} dx = \frac{1}{4} \arctan(4y), \\ \int \frac{1}{x^2 - x - 6} dx &= \frac{1}{5} \int \left[\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x + 2} \right] dx = \frac{1}{5} \log \left| \frac{x - 3}{x + 2} \right|. \end{aligned}$$

Quindi deve essere

$$\frac{1}{4} \arctan(4y(x)) = \frac{1}{5} \log \left| \frac{x - 3}{x + 2} \right| + c,$$

e sfruttando la condizione iniziale si ottiene

$$\frac{1}{4} \arctan(-1) = \frac{1}{5} \log(1) + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{\pi}{16}.$$

La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y(x) = \frac{1}{4} \tan \left[\frac{4}{5} \log \left| \frac{x - 3}{x + 2} \right| - \frac{\pi}{4} \right].$$

Esercizio 3

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{2}{n+1}} - 1 \right) .$$

Svolgimento

La serie è a termini positivi. Poiché

$$e^{\frac{2}{n+1}} - 1 = \frac{2}{n+1} + o(1/(n+1)) ,$$

Per confronto con la serie armonica si ottiene che la serie data diverge.

Esercizio facoltativo

Data la funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x e^{5t^2} dt + 6 ,$$

dimostrare che è invertibile e, detta G la sua inversa, calcolare $G'(6)$.

Svolgimento

Poiché $t \mapsto e^{5t^2}$ è continua, F è derivabile e vale

$$F'(x) = e^{5x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} ,$$

e dunque F è strettamente crescente e quindi invertibile. Per il teorema sulla derivata della funzione inversa

$$G'(6) = \frac{1}{F'(G(6))} .$$

Sia ha $G(6) = x$ se e solo se $F(x) = 6$ se e solo se $x = 0$. Ergo

$$G'(6) = \frac{1}{F'(0)} = 1 .$$