Primo appello mattina 2003/2004 - Tema 1

Esercizio 1

Studiare la funzione
$$f(x) = |2x+1|\, e^{\frac{1}{x}}$$
(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile e calcolare i limiti di f' per x che tende agli estremi del suo dominio; [**facoltativo:** studiarne la convessità e gli eventuali flessi]; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

Svolgimento

Dominio: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, per evidenti ragioni. Inoltre $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$ e si annulla solo in $x = -1/2$, che quindi è punto di minimo assoluto.
Limiti ed eventuali asintoti: Si ha
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} = +\infty\,,$$
e dunque la retta $x = 0$ è asintoto verticale. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x}\, e^{1/x} = 2\,,\\
\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - 2x\big] &= \lim_{x\to+\infty} \big[2x(e^{1/x} - 1) + e^{1/x}\big]\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[2x\left(\frac{1}{x} + o(1/x)\right) + e^{1/x}\right] = 3\,,\\
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x-1}{x}\, e^{1/x} = -2\,,\\
\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) + 2x\big] &= \lim_{x\to+\infty} \big[2x(1 - e^{1/x}) - e^{1/x}\big]\\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[2x\left(-\frac{1}{x} + o(1/x)\right) - e^{1/x}\right] = -3\,,
\end{aligned}$$
Si ottiene che

1. la retta di equazione $y = 2x + 3$ è asintoto obliquo a $+\infty$;
2. la retta di equazione $y = -2x - 3$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

Derivata prima: La funzione è derivabile in $\mathcal{D}' \doteq \mathcal{D} \setminus \{-1/2\}$, perché $x \mapsto |2x+1|$ non è derivabile in $x = -1/2$. Per $x \in \mathcal{D}'$ si ha
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\,\mathrm{sgn}(2x+1)e^{1/x} - \frac{1}{x^2}|2x+1|\, e^{1/x}\\
&= \mathrm{sgn}(2x+1)\, e^{1/x}\left[2 - \frac{2x+1}{x^2}\right] = \mathrm{sgn}(2x+1)\, e^{1/x} \cdot \frac{2x^2-2x-1}{x^2}\,,
\end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $|2x+1| = \operatorname{sgn}(2x+1)(2x+1)$. Poiché

$$\lim_{x\to -1/2-} f'(x) = \lim_{x\to -1/2-} -e^{1/x} \cdot \frac{2x^2-2x-1}{x^2} = -2e^{-2}$$

$$\lim_{x\to -1/2+} f'(x) = \lim_{x\to -1/2-} e^{1/x} \cdot \frac{2x^2-2x-1}{x^2} = 2e^{-2}\,,$$

il punto $x=-1/2$ è punto angoloso per f. Studiamo ora il segno di f'. Se $x \in \mathcal{D}'$, allora

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{sgn}(2x+1)\cdot(2x^2-2x-1) \geq 0\,.$$

Poiché

$$2x^2-2x-1 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,,$$

si ottiene che

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,,$$

ed inoltre

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ne consegue che

1. il punto $x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ è di massimo relativo;
2. il punto $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ è di minimo relativo.

Inoltre

$$f \quad \text{è crescente in} \qquad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] \qquad \text{e in} \qquad \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[\,,$$

$$f \quad \text{è decrescente in} \quad \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \qquad \text{in} \qquad \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0\right[\qquad \text{e in} \quad \left]0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]\,.$$

Derivata seconda: f' è derivabile in $\mathcal{D}'$ perché prodotto di funzioni derivabili. Si ha

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \operatorname{sgn}(2x+1)\, D\left[e^{1/x}\left(2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\right] \\
&= \operatorname{sgn}(2x+1)\, e^{1/x}\left[-\frac{1}{x^2}\left(2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\right] \\
&= \operatorname{sgn}(2x+1)\, \frac{e^{1/x}}{x^4}\,(4x+1)\,.
\end{aligned}$$

Allora

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sgn}(2x+1)\cdot(4x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x \geq -\frac{1}{4}\,.$$

Se ne deduce che

$$f \quad \text{è convessa in} \quad \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right], \quad \text{in} \quad \left[-\frac{1}{4}, 0\right[\quad \text{e in} \quad]0, +\infty[\,,$$

$$f \quad \text{è concava in} \quad \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right].$$

Ne consegue che i punti $x = -1/2$ e $x = -1/4$ sono punti di flesso per f. Un abbozzo del grafico è riportato in figura 1.

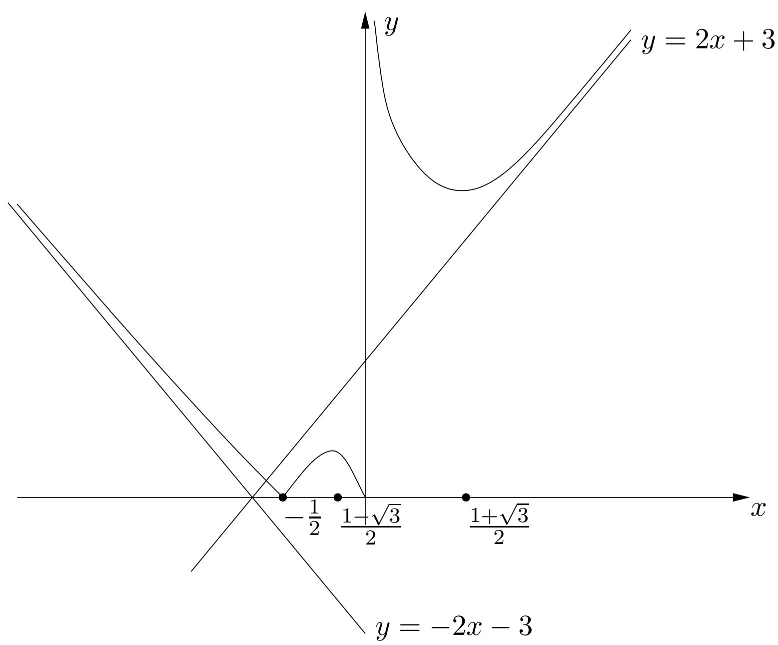

Figura 1: Esercizio 1

Esercizio 2

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \left| \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n^{\alpha}} \right|$$

al variare di $\alpha > 0$.

Svolgimento

Poiché la serie è a termini positivi, si può usare il Criterio Asintotico del Confronto. Si noti che

$$\left|\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n^\alpha}\right| = \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^\alpha}+o(1/n^4)\right| .$$

Da questo si ottiene che:

1. Se $\alpha < 1$,
$$\left|\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}+o(1/n^\alpha)\,,$$
per cui il termine generale della serie si scrive
$$n^{2/3}\left|\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^{\alpha-2/3}}+o(1/n^{\alpha-2/3})\,,$$
da cui si ricava
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2/3}\left|\sin(1/n)-(1/n^\alpha)\right|}{1/n^{\alpha-2/3}} = 1\,.$$
Quindi la serie converge se e solo se $\alpha-(2/3)>1$, cioè se e solo se $\alpha>5/3$. Poiché avevamo fissato $\alpha<1$, la nostra serie non converge.

2. Se $\alpha = 1$ si ottiene
$$\left|\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}+o(1/n^4)\,,$$
per cui il termine generale della serie si scrive
$$n^{2/3}\left|\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{3!}\frac{1}{n^{3-2/3}}+o(1/n^{3-2/3})\,,$$
da cui si ricava
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2/3}\left|\sin(1/n)-(1/n^\alpha)\right|}{1/n^{7/3}} = \frac{1}{3!}\,,$$
e quindi la serie è convergente essendo tale $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}1/n^{7/3}$.

3. Se $\alpha > 1$ si ottiene
$$\left|\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n}+o(1/n)\,,$$
per cui il termine generale della serie si scrive
$$n^{2/3}\left|\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{3!}\frac{1}{n^{1-2/3}}+o(1/n^{1-2/3})\,,$$
da cui si ricava
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2/3}\left|\sin(1/n)-(1/n^\alpha)\right|}{1/n^{1/3}} = 1\,,$$
e quindi la serie è divergente essendo tale $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}1/n^{1/3}$.

Esercizio 3

Data l'equazione differenziale

$$y' = (y+2)(y+1)\,\tan x,$$

a) se ne trovino tutte le soluzioni costanti;

b) se ne trovi (esplicitamente) la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(\pi) = 2$.

Svolgimento

a) Le soluzioni costanti si trovano imponendo che

$$(y+2)(y+1) = 0\,.$$

Quindi $y : x \mapsto -2$ e $y : x \mapsto -1$ sono le soluzioni cercate.

b) Deve essere

$$\int \frac{dy}{(y+2)(y+1)} = \int \tan x \; dx\,.$$

Poiché

$$\int \frac{dy}{(y+2)(y+1)} = \int \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}\right) \, dy = \log\left|\frac{y+1}{y+2}\right| + c\,,$$

$$\int \tan x \; dx = -\log|\cos x| + c\,,$$

si ricava che

$$\log\left|\frac{y(x)+1}{y(x)+2}\right| = -\log|\cos x| + c\,. \tag{1}$$

Imponendo che $y(\pi) = 2$, si ha

$$\log\left|\frac{2+1}{2+2}\right| = -\log|\cos\pi| + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \log\frac{3}{4}\,.$$

Sostituendo in (1) e osservando che $\dfrac{y(x)+1}{y(x)+2} \geq 0$ per $x = \pi$, si ottiene

$$\frac{y(x)+1}{y(x)+2} = \frac{3}{4}\frac{1}{|\cos x|}$$

da cui si ricava

$$y(x) = \frac{6 - 4|\cos x|}{4|\cos x| - 3}\,.$$

Esercizio 4

Determinare le soluzioni dell'equazione

$$\Big|z + 3i\Big| = \Big||z| - 3\Big| \tag{2}$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

Svolgimento

Poichè $z \in \mathbb{C}$ risolve l'equazione se e solo se risolve

$$\Big|z + 3i\Big|^2 = \Big||z| - 3\Big|^2 \tag{3}$$

scritto $z = x + iy$ in forma algebrica, da (3) si ottiene

$$x^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 6\sqrt{x^2+y^2} + 9\,,$$

da cui

$$\sqrt{x^2+y^2} = -y\,.$$

Questa equazione ha soluzioni se e solo se $-y \geq 0$, cioè $y \leq 0$, e, imposta tale condizione, elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene che deve essere $x = 0$. Quindi z risolve (2) se e solo se $z = iy$ con $y \leq 0$ (vedi figura 2).

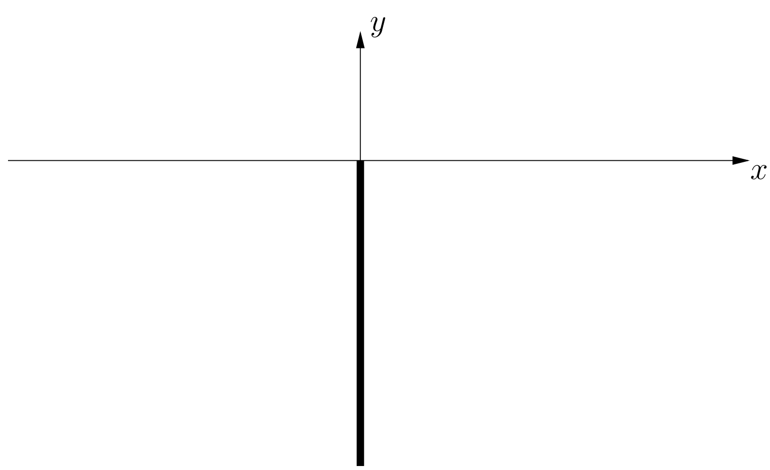

Figura 2: Esercizio 4

Esercizio facoltativo

Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Posto $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, si determini l'insieme dei punti in cui F è derivabile.

Svolgimento

Poiché f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, il Teorema Fondamentale del Calcolo ci assicura che F è derivabile in tale insieme e che vale

$$F'(x) = \arctan \frac{1}{x-1} \quad \forall x \neq 1 \, .$$

Inoltre, essendo F continua in tutto $\mathbb{R}$, usando il Teorema del limite della derivata, si ottiene che

$$F'_-(1) = \lim_{x \to 1-} F'(x) = -\frac{\pi}{2} \, ,$$
$$F'_+(1) = \lim_{x \to 1+} F'(x) = \frac{\pi}{2} \, ,$$

e quindi F ha in $x = 1$ un punto angoloso e non è derivabile in tale punto.