Primo appello pomeriggio 2003/2004 - Tema 1

Esercizio 1

Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos \left| x^2 - 3x + 2 \right|$$

(determinare il dominio D; studiare la continuità e la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile e calcolare i limiti di f' per x che tende agli estremi del suo dominio; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

Svolgimento

Il dominio $\mathcal{D}$ di f è dato dall'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ che verificano

$$\left| x^2 - 3x + 2 \right| \in [-1, 1]\,,$$

da cui si ottiene

$$-1 \le x^2 - 3x + 2 \le 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 3 \ge 0 \\ x^2 - 3x + 1 \le 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,$$

da cui

$$\mathcal{D} = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]\,.$$

f risulta continua in $\mathcal{D}$ perché composizione di funzioni continue. Inoltre, poiché

$$0 \le \left| x^2 - 3x + 2 \right| \le 1 \quad \forall x \in \mathcal{D}\,,$$

si ha che

$$0 \le f(x) \le \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathcal{D}\,,$$

ed inoltre

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left| x^2 - 3x + 2 \right| = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Quindi si può subito affermare che $x = (3-\sqrt{5})/2$ e $x = (3+\sqrt{5})/2$ sono punti di minimo assoluto per la funzione.
Derivata prima: La funzione è derivabile per $|x^2 - 3x + 2| \ne 0$ (perché $t \mapsto |t|$ non è derivabile in $t = 0$) e per $|x^2 - 3x + 2| \ne 1$ (perché $t \mapsto \arccos t$ non è derivabile per $t = 1$). Quindi l'insieme $\mathcal{D}'$ dei punti di derivabilità di f è

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1, 2 \right\}\,.$$

Se $x \in \mathcal{D}'$ si ottiene

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} \cdot \operatorname{sgn}(x^2-3x+2) \cdot (2x-3)\,.$$

Osserviamo innanzitutto che

$$\operatorname{sgn}(x^2-3x+2) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \text{ o } 2 < x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3-2x}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} & \text{se} \quad \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \text{ o } 2 < x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{2x-3}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} & \text{se} \quad 1 < x < 2\,. \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti di f' nei punti di accumulazione di $\mathcal{D}'$ esterni ad esso.

$$\lim_{x\to(3-\sqrt{5})/2+} f'(x) = \lim_{x\to(3-\sqrt{5})/2+} \frac{3-2x}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to1-} f'(x) = \lim_{x\to1-} \frac{3-2x}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to1+} f'(x) = \lim_{x\to1+} \frac{2x-3}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} = -1\,,$$

$$\lim_{x\to2-} f'(x) = \lim_{x\to2-} \frac{2x-3}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to2+} f'(x) = \lim_{x\to2+} \frac{3-2x}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} = -1\,,$$

$$\lim_{x\to(3+\sqrt{5})/2-} f'(x) = \lim_{x\to(3+\sqrt{5})/2-} \frac{3-2x}{\sqrt{1-(x^2-3x+2)^2}} = -\infty\,.$$

Quindi $x = (3-\sqrt{5})/2$ e $x = (3+\sqrt{5})/2$ sono punti a tangente verticale, mentre $x = 1$ e $x = 2$ sono punti angolosi. Riguardo al segno di f' per lo studio degli intervalli di monotonia, si ha che per $x \in \mathcal{D}'$

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sgn}(x^2-3x+2)\cdot(2x-3) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1 \quad \text{o} \quad \frac{3}{2} \leq x < 2\,,$$

e $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 3/2$. Si ottiene che f ha due punti di massimo assoluto in $x = 1$ e $x = 2$ dove vale $\pi/2$, ed un punto di minimo relativo in $x = 3/2$. Inoltre

$$f \quad \text{è crescente in} \quad \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \quad \text{e in} \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]\,,$$

$$f \quad \text{è decrescente in} \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad \text{e in} \quad \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]\,.$$

Il grafico è riportato in figura 1.

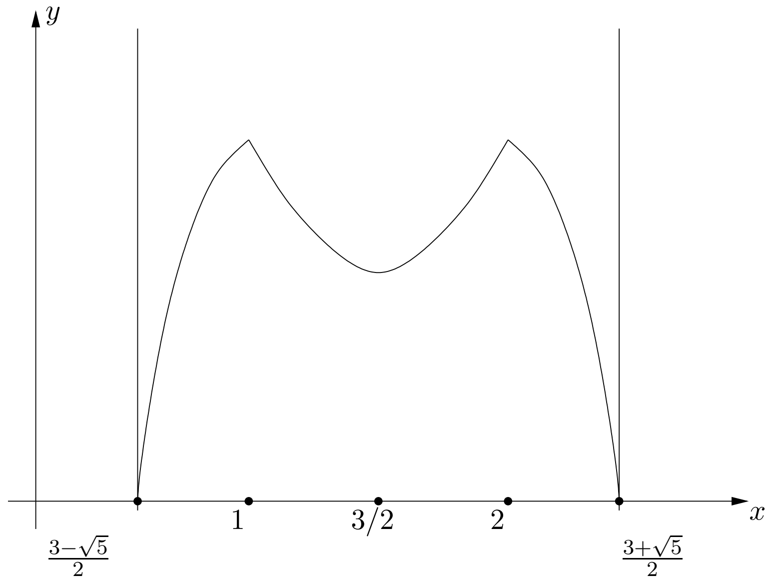

Figura 1: Esercizio 1

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-3}\,\arctan(1/x^{2\alpha})}\,.$$

a) Si calcoli una primitiva di f nel caso $\alpha = 0$.

b) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che f è infinitesima per $x \to +\infty$ e, per tali α, si calcoli l'ordine di infinitesimo di f per $x \to +\infty$.

c) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ risulti convergente.

d) Lo si calcoli, se possibile, nel caso $\alpha = 0$.

Svolgimento

a) Si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x-3}}\,dx &\underset{t=\sqrt{x-3}}{\downarrow}= \frac{4}{\pi}\int\frac{1}{(t^2+3)t}2t\,dt = \frac{8}{3\pi}\int\frac{1}{1+(t/\sqrt3)^2}\,dt\\ &= \frac{8\sqrt3}{3\pi}\int\frac{1/\sqrt3}{1+(t/\sqrt3)^2}\,dt = \frac{8\sqrt3}{3\pi}\arctan\frac{t}{\sqrt3}+c\\ &= \frac{8\sqrt3}{3\pi}\arctan\sqrt{\frac{x-3}{3}}+c\,.\end{aligned} \tag{1}$$

b) Se $\alpha = 0$, allora

$$f(x) = \frac{4}{\pi x\sqrt{x-3}}\,, \tag{2}$$

che per $x \to +\infty$ è infinitesima con ordine $3/2$. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\pi x\sqrt{x-3}} \cdot x^{3/2} = \frac{4}{\pi}\,.$$

Se $\alpha > 0$, allora per $x \to +\infty$ possiamo scrivere

$$\arctan \frac{1}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{x^{2\alpha}} + o\big(1/x^{2\alpha}\big)\,.$$

Inoltre, sempre per $x \to +\infty$, si ha

$$x\sqrt{x-3} = x^{3/2} + o(x^{3/2})\,,$$

perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x-3}}{x^{3/2}} = 1\,.$$

Allora

$$f(x) = \frac{1}{\big[x^{3/2} + o(x^{3/2})\big]\big[1/x^{2\alpha} + o(1/x^{2\alpha})\big]} = \frac{1}{x^{(3/2)-2\alpha} + o\big(x^{(3/2)-2\alpha}\big)}\,.$$

da cui, usando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^{(3/2)-2\alpha}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{(3/2)-2\alpha}}{x^{(3/2)-2\alpha} + o\big(x^{(3/2)-2\alpha}\big)} = 1\,. \tag{3}$$

Se ne deduce che

1. se $\alpha < 3/4$, la funzione è infinitesima con ordine di infinitesimo $\dfrac{3}{2} - 2\alpha$;
2. se $\alpha \geq 3/4$, la funzione non è infinitesima.

c) Poiché evidentemente $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 4$, da (2)-(3) e usando il Criterio Asintotico del Confronto, si ottiene che

$$\int_4^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^{(3/2)-2\alpha}}\,dx \text{ converge}\,,$$

e quindi se e solo se

$$\frac{3}{2} - 2\alpha > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha < \frac{1}{4}\,.$$

d) Da (1) si ottiene

$$\int_4^{+\infty} \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x-3}}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_4^{\omega}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x-3}}\,dx$$
$$= \lim_{\omega\to+\infty}\frac{8\sqrt{3}}{3\pi}\arctan\sqrt{\frac{x-3}{3}}\,\Bigg|_4^{\omega}$$
$$= \lim_{\omega\to+\infty}\frac{8\sqrt{3}}{3\pi}\left[\arctan\sqrt{\frac{\omega-3}{3}}-\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$
$$= \frac{8\sqrt{3}}{3\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right] = \frac{8}{9}\sqrt{3}\,.$$

Esercizio 3

Date l'equazione differenziale

$$y''+2y'+y=e^{-x} \tag{4}$$

e la funzione $\varphi(x)=ax^2e^{-x}$ $(a\in\mathbb{R})$,

a) si determini a in modo che φ sia soluzione di (4);

b) si determini la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0)=0$ e $y'(0)=1$.

Svolgimento

a) Affinché φ sia soluzione di (4) deve soddisfare

$$\varphi''(x)+2\varphi'(x)+\varphi(x)=e^{-x} \tag{5}$$

per ogni $x\in\mathbb{R}$. Derivando φ due volte si ottiene

$$\varphi'(x)=ae^{-x}(2x-x^2)\,,\qquad \varphi''(x)=ae^{-x}(x^2-4x+2)\,,$$

che sostituite in (5) portano a

$$2ae^{-x}=e^{-x}\,,$$

che è verificata per $a=1/2$.

b) L'equazione omogenea associata a (4) è

$$y''+2y'+y=0\,,$$

la cui equazione caratteristica è

$$\lambda^2+2\lambda^2+1=0\,,$$

che ha $\lambda=-1$ come radice con molteplicità 2. Quindi, essendo $\varphi(x)=(1/2)x^2e^{-x}$ una soluzione particolare di (4), il suo integrale generale è

$$y(x)=Ae^{-x}+Bxe^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}\,.$$

Ora determiniamo le costanti reali A e B in modo che siano verificate le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Risulta

$$\begin{aligned} y(0) = A \qquad &\Rightarrow \qquad A = 0\,, \\ y'(0) = -A + B \qquad &\Rightarrow \qquad B = 1\,, \end{aligned}$$

per cui si ottiene

$$y(x) = xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x}\,.$$

Esercizio 4

Si determini il dominio della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(|z| - i)(z^2 - 2z + 5)}$$

Svolgimento

Deve essere

$$|z| - i \neq 0 \qquad \text{e} \qquad z^2 - 2z + 5 \neq 0\,.$$

La prima condizione è sempre verificata, perché $\mathrm{Im}\,(|z| - i) = -1 \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Riguardo alla seconda condizione, risolviamo l'equazione $z^2 - 2z + 5 = 0$. Poiché il discriminante dell'equazione è $\Delta = -16$, si ottiene che essa ha radici

$$z_1 = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i \qquad z_2 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i\,.$$

DUnque il dominio della funzione è l'insieme $\mathbb{C} \setminus \{1 - 2i, 1 + 2i\}$.

Esercizio facoltativo

Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ che soddisfa l'equazione:

$$u(x) = \pi + \int_0^x t\cos(u(t))\;dt.$$

Si calcoli $u'(0)$.

Svolgimento

Dal Teorema Fondamentale del Calcolo, essendo u di classe $\mathcal{C}^1$ e quindi continua, si ottiene che

$$u'(x) = x\cos(u(x))$$

da cui

$$u'(0) = 0$$