Secondo appello 2003/2004 - Tema 2

Esercizio 1

Studiare la funzione
$$f(x) = \log\left|\frac{3}{2}e^{-x} - e^{-2x}\right|$$
(determinare il dominio $\mathcal{D}$; studiare il segno di f, calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

Svolgimento

Dominio: Il dominio $\mathcal{D}$ di f è dato dall'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ che verificano
$$\left|\frac{3}{2}e^{-x} - e^{-2x}\right| > 0\,,$$
da cui si ottiene che deve essere
$$\frac{3}{2}e^{-x} - e^{-2x} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{-x} \neq \frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \neq \log\frac{2}{3}\,,$$
da cui
$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \log(2/3) \right\}.$$
f risulta di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathcal{D}$ perché composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Segno: Si ha
$$f(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{3}{2}e^{-x} - e^{-2x}\right| \geq 1\,,$$
da cui si ottiene
$$\frac{3}{2}e^{-x} - e^{-2x} \leq -1 \qquad \text{o} \qquad \frac{3}{2}e^{-x} - e^{-2x} \geq 1\,. \tag{1}$$
Dalla prima si ricava
$$2e^{-2x} - 3e^{-x} - 2 \geq 0$$
che è verificata se e solo se
$$e^{-x} \geq 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leq -\log 2\,.$$
Dalla seconda delle (1) si ricava
$$2e^{-2x} - 3e^{-x} + 2 \leq 0$$
che non è mai verificata perché il polinomio $2t^2 - 3t - 2$ ha discriminante negativo. Riassumendo
$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -\log 2\,,$$
$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\log 2\,.$$

Ricerca di eventuali asintoti: Si ha banalmente

$$\lim_{x\to\log(2/3)\pm} f(x) = -\infty\,,$$

e quindi la retta $x = \log(2/3)$ è asintoto verticale. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{3}{2}e^{-x} - e^{-2x}\right| = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left|\frac{3}{2}e^{-x} - e^{-2x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left|\frac{3}{2} - e^{-x}\right| = +\infty\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,,$$

per cui f non ha asintoti orizzontali. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\log e^{-x} + \log|e^{-x} - 3/2|}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x + \log|e^{-x} - 3/2|}{x} = -1\,, \\
\lim_{x\to+\infty}\big[f(x) + x\big] &= \lim_{x\to+\infty}\big[-x + \log|e^{-x} - 3/2| + x\big] \\
&= \log\frac{3}{2} \\
\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\log e^{-2x} + \log|(3/2)e^{x} - 1|}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x + \log|(3/2)e^{x} - 1|}{x} = -2\,, \\
\lim_{x\to-\infty}\big[f(x) + 2x\big] &= \lim_{x\to-\infty}\big[-2x + \log|(3/2)e^{x} - 1| + 2x\big] = 0\,,
\end{aligned}$$

da cui si ottiene che la retta di equazione $y = -x+\log(3/2)$ è asintoto obliquo a $+\infty$, mentre la retta di equazione $y = -2x$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

Derivata prima: Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{(3/2)e^{-x} - e^{-2x}}\cdot\left[-\frac{3}{2}e^{-x} + 2e^{-2x}\right] = -\frac{4e^{-2x} - 3e^{-x}}{2e^{-2x} - 3e^{-x}} = -\frac{4e^{-x} - 3}{2e^{-x} - 3}\,.$$

Si ricava che $f'(x) \geq 0$ se e solo se

$$\frac{3}{4} \leq e^{-x} < \frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \log\frac{2}{3} < x \leq \log\frac{4}{3}\,.$$

Si ottiene che f ha un punto di massimo relativo in $x = \log(4/3)$ e non ha punti di minimo relativo. Inoltre

$$\begin{aligned}
&f \quad \text{è crescente in} \qquad \left]\log\frac{2}{3}, \log\frac{4}{3}\right]\,, \\
&f \quad \text{è decrescente in} \qquad \left]-\infty, \log\frac{2}{3}\right[\qquad \text{e in} \qquad \left[\log\frac{4}{3}, +\infty\right[\,.
\end{aligned}$$

Derivata seconda: Si ha

$$f'(x) = -\frac{4e^{-x} - 3}{2e^{-x} - 3} = -1 - \frac{2e^{-x}}{2e^{-x} - 3} = -1 + \frac{2}{3e^{x} - 2}\,,$$

da cui

$$f''(x) = 2D\left[\frac{1}{3e^{x} - 2}\right] = -\frac{6e^{x}}{(3e^{x} - 2)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}\,,$$

e quindi f è concava in $]-\infty, \log(2/3)[$ e in $]\log(2/3), +\infty[$.
Il grafico è riportato in figura 1.

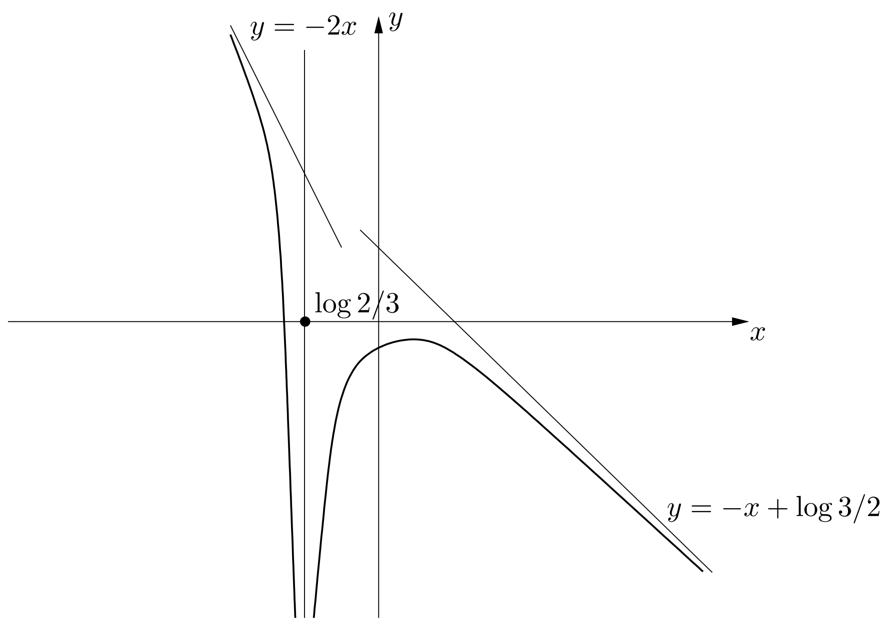

Figura 1: Esercizio 1

Esercizio 2

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \log x + \sinh x^2}{\sin x + 2(\cos x^{1/2} - 1)\, e^{x}}\,.$$

Svolgimento

Si osservi che

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sinh x^2}{x^2 \log x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sinh x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\log x} = 0\,,$$

e quindi vale

$$\sinh x^2 = o(x^2 \log x) \qquad \Rightarrow \qquad x^2 \log x + \sinh x^2 = x^2 \log x + o(x^2 \log x)\,.$$

Al denominatore, poiché

$$\sin x = x + o(x^2)$$

e

$$\begin{aligned} 2(\cos x^{1/2} - 1)\, e^x &= 2\left[-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)\right] \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] \\ &= 2\left[-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] \\ &= -x - \frac{11}{12}x^2 + o(x^2)\,, \end{aligned}$$

si ha

$$\sin x + 2(\cos x^{1/2} - 1)\, e^x = -\frac{11}{12}x^2 + o(x^2)\,.$$

Usando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \log x + \sinh x^2}{\sin x + 2(\cos x^{1/2} - 1)\, e^x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \log x + o(x^2 \log x)}{-(11/12)x^2 + o(x^2)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \log x}{-(11/12)x^2} = +\infty\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}\,;$$

risolvere poi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{4}{x} y = \dfrac{1}{x(x^2+3)} \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Svolgimento

Si osservi che

$$x^3 = x(x^2+3) - 3x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^3}{x^2+3} = x - \frac{3x}{x^2+3}\,.$$

Allora si ottiene

$$\begin{aligned} \int f(x)\ dx &= \int \left[x - \frac{3x}{x^2+3}\right]\ dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\log(x^2+3) + c\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Per risolvere (2), moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione differenziale per x^4 ottenendo

$$x^4 y' + 4x^3 y = \frac{x^3}{x^2+3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt} t^4 y(t) = \frac{t^3}{t^2+3}$$

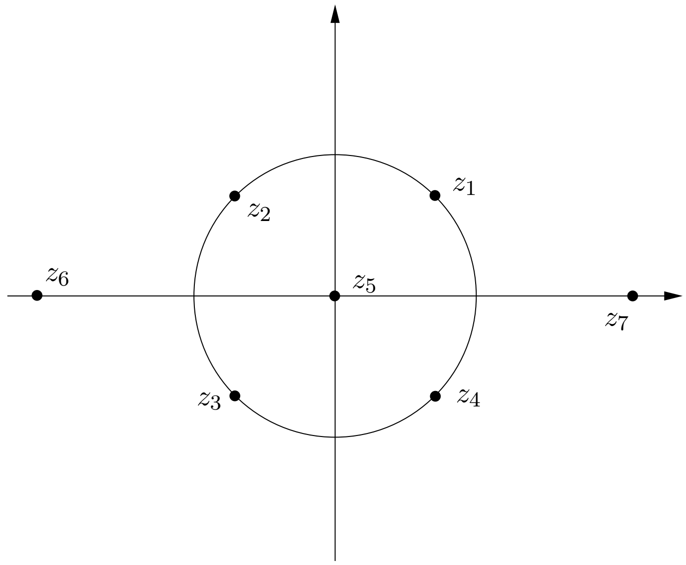

Figura 2: Esercizio 4

Integrando ambo i membri tra 1 e x e sfruttando (3) si ottiene

$$t^4 y(t)\Big|_1^x = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}\log(t^2+3)\right]_1^x$$

da cui, essendo $y(1) = 0$,

$$x^4 y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\log(x^2+3) - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\log 4\,.$$

Quindi la soluzione di (2) si scrive

$$y(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\log(x^2+3)}{x^4} + \frac{3\log 4 - 1}{2x^4}\,.$$

Esercizio 4

Determinare in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$(2z^4+1)(3z^6-2z^4) = 0$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

Svolgimento

Deve essere

$$2z^4+1=0 \qquad \text{o} \qquad 3z^6-2z^4=0\,.$$

La prima condizione dice che z deve essere una radice quarta di $-1/2$, e quindi ha soluzioni

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\,,\\
z_2 &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\,,\\
z_3 &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\,,\\
z_4 &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\,.
\end{aligned}
$$

La seconda equazione si scrive

$$z^4(3z^2 - 2) = 0\,,$$

che ha come soluzioni $z_5 = 0$, $z_6 = -\sqrt{3/2}$ e $z_7 = \sqrt{3/2}$. Il disegno è in figura 2.