Terzo appello 2003/2004 - Tema 3

Esercizio 1

Studiare la funzione
$$f(x) = \log(2\cosh x - 1)$$
(determinare il dominio D; studiare il segno di f, calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

Svolgimento

Dominio: Il dominio $\mathcal{D}$ di f è dato dall'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ che verificano
$$2\cosh x - 1 > 0\,,$$
da cui si ottiene che deve essere
$$\cosh x > \frac{1}{2}\,,$$
che è sempre verificata. Quindi $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. f risulta di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathcal{D}$ perché composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$. Osserviamo inotre che f è pari, essendo tale il cosh. Quindi ci limiteremo a studiare f in $[0, +\infty[$, desumendo le altre informazioni per simmetria.
Segno: Si ha
$$f(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\cosh x - 1 \geq 1\,,$$
da cui si ottiene
$$\cosh x \geq 1$$
che è sempre verificata. In particolare $f(x) = 0$ se e solo se $\cosh x = 1$, cioè se e solo se $x = 0$, da cui si deduce che $x = 0$ è punto di minimo assoluto.
Ricerca di eventuali asintoti: Si ha banalmente
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\,,$$
e quindi f non ha asintoti orizzontali. Poiché il dominio della funzione non ha punti di accumulazione reali ad esso esterni, f non ha asintoti verticali. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui. Riscriviamo f come
$$f(x) = \log(2\cosh x - 1) = \log\left(2\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1\right) = \log(e^x + e^{-x} - 1)\,.$$
Si ottiene
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x + e^{-x} - 1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left[e^x(1 + e^{-2x} - e^{-x})\right]}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log e^x + \log(1 + e^{-2x} - e^{-x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \log(1 + e^{-2x} - e^{-x})}{x} \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\log(e^x+e^{-x}-1)-x\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\log e^x+\log(1+e^{-2x}-e^{-x})-x\right]\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Si ottiene che la retta di equazione $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Per simmetria, la retta di equazione $y = -x$ è asintoto obliquo a $-\infty$. Per determinare la posizione del grafico di f rispetto agli asintoti obliqui, si osservi che

$$f(x)\geq x \quad\Leftrightarrow\quad \log(1+e^{-2x}-e^{-x})\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2x}-e^{-x}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-x}\geq 1\,,$$

che non è mai verificata per $x > 0$. Ne segue che il grafico di f è posto al di sotto dell'asintoto a $+\infty$. Risultato analogo si ha per l'asintoto a $-\infty$.

Derivata prima: Si ha

$$f'(x) = \frac{2}{2\cosh x-1}\cdot\sinh x\,.$$

Si ricava che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\sinh x \geq 0$, cioè se e solo se $x \geq 0$. Ne consegue che

$$\begin{aligned} &f \quad \text{è crescente in} \qquad [0,+\infty[\,,\\ &f \quad \text{è decrescente in} \qquad]-\infty,0]\,,\end{aligned}$$

ed ha in $x = 0$ un punto di minimo assoluto, come già osservato.

Derivata seconda: Si ha

$$\begin{aligned} f''(x) = 2D\left[\frac{\sinh x}{2\cosh x-1}\right] &= 2\frac{\cosh x(2\cosh x-1)-2\sinh^2 x}{(2\cosh x-1)^2}\\ &= 2\frac{2(\cosh^2 x-\sinh^2 x)-\cosh x}{(2\cosh x-1)^2} = 2\frac{2-\cosh x}{(2\cosh x-1)^2}\,,\end{aligned}$$

dove si è usata la relazione $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Ne segue che, se $x \geq 0$,

$$f''(x)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2-\cosh x\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq x\leq \operatorname{settcosh}2\,.$$

Sfruttando la simmetria di f, possiamo allora dire che

$$\begin{aligned} &f \quad \text{è convessa in} \qquad [-\operatorname{settcosh}2,\operatorname{settcosh}2]\,,\\ &f \quad \text{è concava in} \qquad]-\infty,-\operatorname{settcosh}2] \qquad \text{e in} \qquad [\operatorname{settcosh}2,+\infty[\,,\end{aligned}$$

ed ha punti di flesso in $x = -\operatorname{settcosh}2$ e in $x = \operatorname{settcosh}2$. Il grafico è riportato in figura 1.

Esercizio 2

Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'+\dfrac{3}{x}y = -\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{\sin 2x(1+\tan^2 x)}{3\sin 2x-4\cos 2x}\\ y(-\pi/3) = 0\,.\end{cases}$$

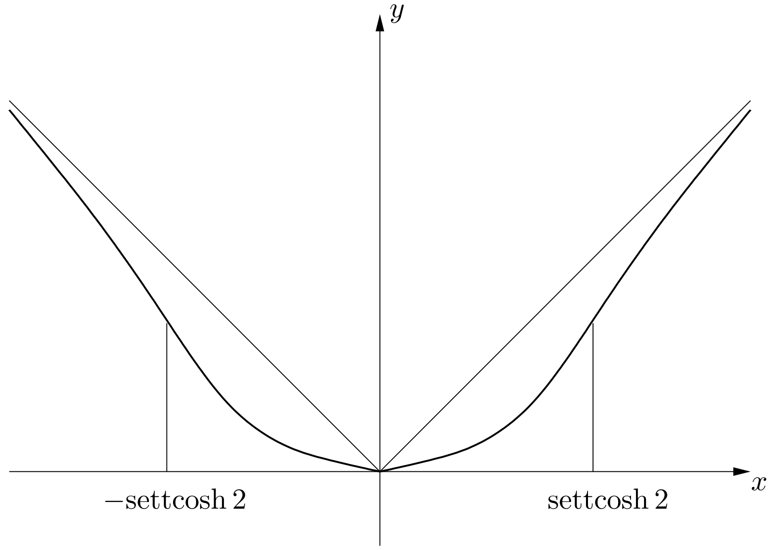

Figura 1: Esercizio 1

Svolgimento

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per x^3 si ottiene

$$\frac{d}{dx}\big[x^3 y(x)\big] = -\frac{\sin 2x(1+\tan^2 x)}{3\sin 2x - 4\cos 2x}\,.$$

Integrando tra $-\pi/3$ e x e sfruttando la condizione iniziale si ha

$$x^3 y(x) = -\int_{-\pi/3}^{x} \frac{\sin 2t(1+\tan^2 t)}{3\sin 2t - 4\cos 2t}\,dt\,,$$

da cui

$$y(x) = -\frac{1}{x^3}\int_{-\pi/3}^{x} \frac{\sin 2t(1+\tan^2 t)}{3\sin 2t - 4\cos 2t}\,dt\,. \tag{1}$$

non resta che calcolare l'integrale che compare al secondo membro di (1). Utilizzando le formule parametriche

$$\sin t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\,, \qquad \cos t = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\,,$$

l'integrale si riscrive

$$\int_{-\pi/3}^{x} \frac{\sin 2t(1+\tan^2 t)}{3\sin 2t - 4\cos 2t}\,dt = \int_{-\pi/3}^{x} \frac{\tan t}{2\tan^2 t + 3\tan t - 2}\cdot(1+\tan^2 t)\,dt\,.$$

Operando la sostituzione $s = \tan t$, si ottiene

$$\int_{-\pi/3}^{x} \frac{\sin 2t(1+\tan^2 t)}{3\sin 2t - 4\cos 2t}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\tan x} \frac{s}{2s^2+3s-2}\,ds\,. \tag{2}$$

Per risolvere l'integrale a secondo membro di (2) osserviamo che

$$\frac{s}{2s^2+3s-2} = \frac{s}{(2s-1)(s+2)} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2s-1}\,,$$

che utilizzata in (2) ci permette di ricavare

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/3}^{x} \frac{\sin 2t(1+\tan^2 t)}{3\sin 2t - 4\cos 2t}\,dt &= \frac{2}{5}\int_{-\sqrt{3}}^{\tan x}\frac{1}{s+2}\,ds + \frac{1}{5}\int_{-\sqrt{3}}^{\tan x}\frac{1}{2s-1}\,ds \\
&= \frac{2}{5}\log|s+2|\Big|_{-\sqrt{3}}^{\tan x} + \frac{1}{10}\log|2s-1|\Big|_{-\sqrt{3}}^{\tan x} \\
&= \frac{2}{5}\big[\log|\tan x+2| - \log(2-\sqrt{3})\big] \\
&\quad + \frac{1}{10}\big[\log|2\tan x - 1| - \log(2\sqrt{3}+1)\big]\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Da (1) e (3) si ricava

$$y(x) = -\frac{2}{5x^3}\big[\log|\tan x+2| - \log(2-\sqrt{3})\big] - \frac{1}{10x^3}\big[\log|2\tan x-1| - \log(2\sqrt{3}+1)\big]\,.$$

Esercizio 3

Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\cos n^n)^2}{n^2+n}\,.$$

Svolgimento

Si osservi che

$$\left|(-1)^n\frac{(\cos n^n)^2}{n^2+n}\right| = \frac{(\cos n^n)^2}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2}\,,$$

che è il termine generale di una serie convergente. Per il criterio del confronto la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

Esercizio 4

Sapendo che $z=-2i$ è radice del polinomio

$$z^3 + 2iz^2 + \lambda z - 24 - 10i$$

trovare λ e le altre due radici in forma algebrica.

Svolgimento

Poiché $z = -2i$ è radice del polinomio deve essere

$$(-2i)^3 + 2i(-2i)^2 + \lambda(-2i) - 24 - 10i = 0$$

da cui si ricava $\lambda = 12i - 5$. Il polinomio allora diventa

$$P(z) = z^3 + 2iz^2 + (12i - 5)z - 24 - 10i\,.$$

Per trovare le altre due radici, osserviamo che, poiché $z = -2i$ è radice di P, questo è divisibile per $z + 2i$. Facendo la divisione si ottiene

$$P(z) = (z + 2i) \cdot (z^2 + 12i - 5)\,.$$

Quindi per calcolare le altre radici di P è sufficiente calcolare la radici quadrate di $5 - 12i$. Poiché $|5 - 12i| = 13$, l'argomento principale ϑ di $5 - 12i$ soddisfa

$$\cos\vartheta = \frac{5}{13}\,, \qquad \sin\vartheta = -\frac{12}{13}\,.$$

Le due radici quadrate di $5 - 12i$ sono

$$z_1 = \sqrt{13}\big[\cos(\vartheta/2) + i\sin(\vartheta/2)\big] \qquad \text{e} \qquad z_2 = -\sqrt{13}\big[\cos(\vartheta/2) + i\sin(\vartheta/2)\big]\,.$$

Per calcolarne la forma algebrica, osserviamo che $-\pi/2 < \vartheta < 0$, e quindi

$$\cos(\vartheta/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos\vartheta}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\,, \qquad \sin(\vartheta/2) = -\sqrt{\frac{1 - \cos\vartheta}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\,.$$

Allora le radici cercate sono

$$z_1 = 3 - 2i\,, \qquad z_2 = -3 + 2i\,.$$