

Quarto appello 2003/2004 - Tema 1

Esercizio 1

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x}, \quad \text{in } I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi \right]$$

(determinare il dominio D (in I); calcolare i limiti per x che tende agli estremi del dominio; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile e calcolare i limiti di f' per x che tende agli estremi del suo dominio; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

Svolgimento

Dominio: Il dominio $\mathcal{D}$ di f è dato dall'insieme di tutti gli $x \in I$ che verificano

$$1 - \cos x \neq 0,$$

da cui si ottiene che deve essere $x \neq 2\pi$. Quindi $\mathcal{D} = I \setminus \{2\pi\}$. Notiamo che f è continua in $\mathcal{D}$ essendo rapporto di funzioni continue con denominatore non nullo. Da questo segue che

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2+} f(x) = f(\pi/2) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 5\pi/2-} f(x) = f(5\pi/2) = 1.$$

Segno: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$, essendo f rapporto di funzioni non negative. In particolare $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pi$, che risulta quindi punto di minimo assoluto.

Ricerca di eventuali asintoti: Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2\pi-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2\pi-} -\frac{\sin x}{1 - \cos x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 2\pi-} -\frac{\cos x}{\sin x} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2\pi+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2\pi+} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 2\pi+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty, \end{aligned}$$

e dunque la retta di equazione $x = 2\pi$ è asintoto verticale per f . Poiché il dominio di f è un insieme limitato, la funzione non ha asintoti orizzontali o obliqui.

Derivata prima: Si ha per $x \in \mathcal{D}$, $x \neq \pi$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1 - \cos x)^2} \cdot [\operatorname{sgn}(\sin x) \cos x (1 - \cos x) - |\sin x| \sin x] \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{(1 - \cos x)^2} \cdot [\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x] \\ &= -\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1 - \cos x}, \end{aligned}$$

dove si è sfruttato che $|\sin x| = \operatorname{sgn}(\sin x) \sin x$ e che $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Si ricava che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\operatorname{sgn}(\sin x) \leq 0$, cioè se e solo se $\sin x \leq 0$. Quindi

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi < x < 2\pi.$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} f & \text{ è crescente in } [\pi, 2\pi[, \\ f & \text{ è decrescente in } [\pi/2, \pi] \quad \text{e in }]2\pi, 5\pi/2], \end{aligned}$$

ed ha in $x = \pi$ un punto di minimo assoluto, come già osservato. Inoltre valgono

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} -\frac{1}{1 - \cos x} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{2},$$

e quindi $x = \pi$ è punto angoloso.

Derivata seconda: Per $x \in \mathcal{D} \setminus \{\pi\}$ si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\operatorname{sgn}(\sin x) D \frac{1}{1 - \cos x} = -\operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \left[-\frac{1}{(1 - \cos x)^2} \sin x \right] \\ &= \frac{|\sin x|}{(1 - \cos x)^2}, \end{aligned}$$

che è quantità sempre non negativa. Ne consegue che f è convessa negli intervalli $[\pi/2, 2\pi[$ e $]2\pi, 5\pi/2]$ e non ha punti di flesso. Il grafico è riportato in figura 1.

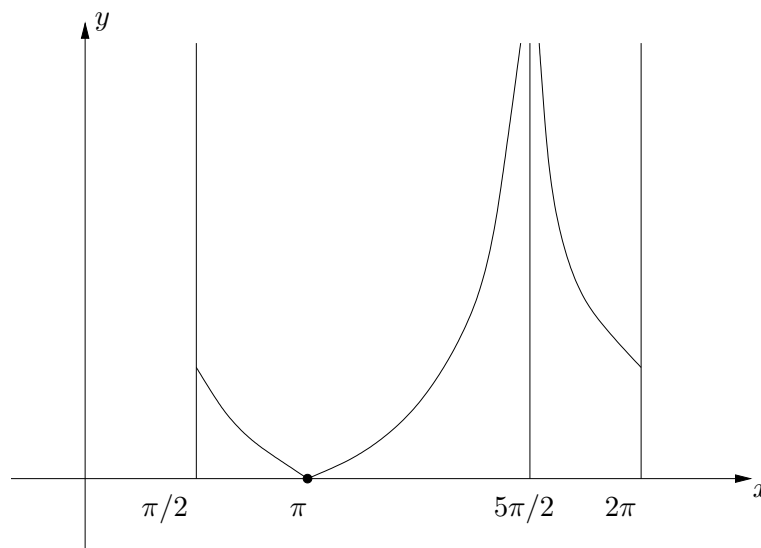


Figura 1: Esercizio 1

Esercizio 2

Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $\varphi(x) = \alpha \tan x$ sia soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = 2 \tan^3 x + \tan^2 x + 1; \quad (1)$$

Determinare poi la soluzione di (1) che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Svolgimento

Affinché φ sia soluzione di (1), per ogni $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, deve valere

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) - 2\varphi(x) = 2\tan^3 x + \tan^2 x + 1. \quad (2)$$

Poiché

$$\varphi'(x) = \alpha(1 + \tan^2 x), \quad \varphi''(x) = 2\alpha \tan x(1 + \tan^2 x),$$

sostituendo in (2), si ottiene che per ogni $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, deve valere

$$2\alpha \tan^3 x + \alpha \tan^2 x + \alpha = 2\tan^3 x + \tan^2 x + 1.$$

Data l'arbitrarietà di x , deve necessariamente essere $\alpha = 1$. Per risolvere il problema di Cauchy con condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, osserviamo che $\varphi(x) = \tan x$ è una soluzione particolare di (1). Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale in questione è dato da

$$y(x) = \psi(x) + \tan x,$$

dove $\psi(x)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + y' - 2y = 0. \quad (3)$$

Le radici caratteristiche di (3) sono le soluzioni di

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

e quindi sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 1$. Allora

$$\psi(x) = Ae^x + Be^{-2x},$$

da cui l'integrale generale di (1)

$$y(x) = Ae^x + Be^{-2x} + \tan x,$$

con A e B costanti reali da determinarsi sfruttando le condizioni iniziali. Poiché

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B \\ y'(x) &= Ae^x - 2Be^{-2x} + 1 + \tan^2(x) \Rightarrow y'(0) = A - 2B + 1, \end{aligned}$$

si ottiene che deve essere

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - 2B + 1 = 2, \end{cases}$$

da cui si ricava $A = 1/3$ e $B = -1/3$. Allora si ottiene che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x} + \tan x.$$

Esercizio 3

Dato l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+1/x^2} \arctan \frac{1}{x} dx, \quad (4)$$

1. si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che risulti convergente;
2. lo si calcoli per $\alpha = -2$.

Svolgimento

1. La funzione integranda è continua in $[1, +\infty[$, quindi l'integrale converge se e solo se esiste finito il

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^\omega \frac{x^\alpha}{1+1/x^2} \arctan \frac{1}{x} dx.$$

Poiché, per ovvi motivi, la funzione integranda è positiva, proviamo ad utilizzare il criterio asintotico del confronto. Per individuare la funzione con cui confrontare, osserviamo che

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o(1/x) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Da questo si deduce che

$$\frac{x^\alpha}{1+1/x^2} \arctan \frac{1}{x} = \frac{x^\alpha}{1+1/x^2} \left(\frac{1}{x} + o(1/x) \right) = \frac{x^{\alpha-1} + o(1/x^{\alpha-1})}{1+1/x^2}.$$

Quindi confrontiamo la funzione integranda con $x \mapsto 1/x^{1-\alpha}$, che ha integrale convergente in $]1, +\infty[$ se e solo se $1 - \alpha > 1$, cioè se e solo se $\alpha < 0$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{1+1/x^2} \arctan \frac{1}{x} \cdot x^{1-\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1} + o(1/x^{\alpha-1})}{1+1/x^2} \cdot x^{1-\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + o(1)}{1+1/x^2} \stackrel{\text{p.d.s.}}{=} 1. \end{aligned}$$

Quindi, per il criterio asintotico del confronto l'integrale in (4) converge se e solo se $\alpha < 0$.

2. Per $\alpha = -2$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x^{-2}}{1+1/x^2} \arctan \frac{1}{x} dx &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^\omega \frac{x^{-2}}{1+1/x^2} \arctan \frac{1}{x} dx \\ &\stackrel{t=1/x}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} - \int_1^{1/\omega} \frac{1}{1+t^2} \arctan t dt \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctan^2 t \Big|_{1/\omega}^1 = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{4} \right)^2 - \arctan^2 \frac{1}{\omega} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

Esercizio 4

Determinare le soluzioni nel piano complesso dell'equazione

$$z^2 + 5 = |z - 3i|^2. \quad (5)$$

Svolgimento

Sia $z = x + iy$. Si ha che

$$\begin{aligned} z^2 + 5 &= (x + iy)^2 + 5 = x^2 + 2ixy - y^2 + 5, \\ |z - 3i|^2 &= |x + (y - 3)i|^2 = x^2 + (y - 3)^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9. \end{aligned}$$

Sfruttando l'equazioni si ottiene

$$x^2 + 2ixy - y^2 + 5 = x^2 + y^2 - 6y + 9,$$

da cui

$$2y^2 - 6y + 4 - 2ixy = 0.$$

Poiché un numero complesso è nullo se e solo se ha nulle la parte reale e la parte immaginaria, deve essere verificato il sistema

$$\begin{cases} xy = 0 \\ 2y^2 - 6y + 4 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta per $x = 0$ o $y = 0$, la seconda è soddisfatta per $y = 1$ o $y = 2$. Si ottiene che le uniche soluzioni del sistema sono $x = 0$ e $y = 1$ oppure $x = 0$ e $y = 2$. Quindi le soluzioni dell'equazione (5) sono $z = i$ oppure $z = 2i$.