Primo compitino 2003/2004 - Tema 3

Esercizio 1

Sia f la funzione di variabile complessa definita da

$$f(z) = \frac{4i + z}{3i - \bar{z}}\,.$$

Si determini il dominio $\mathcal{D}$ di f. Si determini e si disegni sul piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathcal{D}$ tali che $|f(z)| \leq 1$. Si esprimano poi in forma algebrica le radici terze di $\big[f(i)\big]^3$.

Svolgimento

Il dominio $\mathcal{D}$ di f è dato da

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \big\{z \in \mathbb{C} : 3i - \bar{z} \neq 0\big\} \\ &= \big\{z \in \mathbb{C} : z \neq -3i\big\}\,.\end{aligned}$$

Se $z \in \mathcal{D}$, allora $|f(z)| \leq 1$ se e solo se

$$|4i + z| \leq |3i - \bar{z}| \qquad \Leftrightarrow \qquad |4i + z|^2 \leq |3i - \bar{z}|^2\,.$$

Da questa, posto $z = x + iy$, si ottiene

$$x^2 + (y + 4)^2 \leq x^2 + (y + 3)^2\,,$$

da cui

$$y \leq -\frac{7}{2}\,.$$

Quindi gli elementi di $\mathcal{D}$ che soddisfano $|f(z)| \leq 1$ sono tutti e soli quelli con parte immaginaria maggiore o al più uguale a $-7/2$, e quindi stanno nel semipiano in figura 1. Veniamo all'ultima domanda. Poiché $f(i) = 5/4$, dobbiamo calcolare le radici terze di $(5/4)^3$, cioè gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = (5/4)^3$. Sicuramente $z_1 = 5/4$ è soluzione. Le altre, z_2 e z_3, sono tali che z_1, z_2 e z_3 sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $5/4$ (vedi figura 2). Si ottiene allora

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{5}{4}\big[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\big] = -\frac{5}{8} + i\frac{5\sqrt{3}}{8}\,, \\ z_3 &= \frac{5}{4}\big[\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)\big] = -\frac{5}{8} - i\frac{5\sqrt{3}}{8}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Dato l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{\arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) : n = 0, 1, 2, \dots\right\}\,,$$

verificare usando la definizione che $\sup\mathcal{A} = \pi/2$ e $\min\mathcal{A} = 0$.

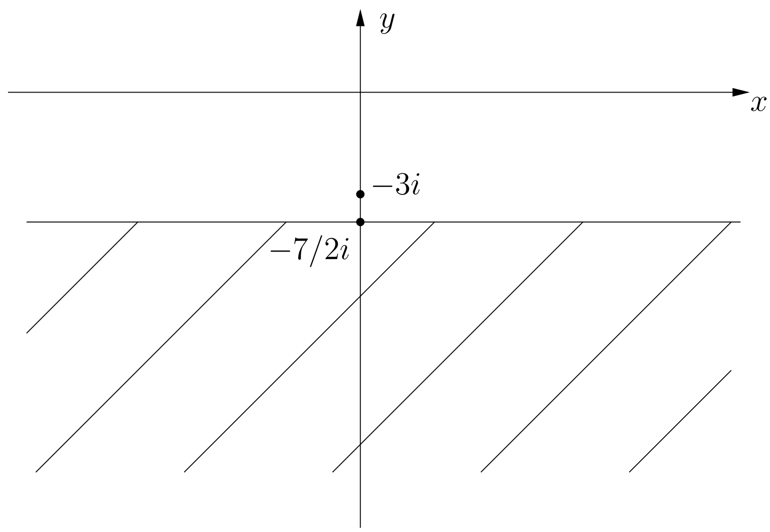

Figura 1: Esercizio 1

Svolgimento

Poiché $0 < 1/(n+1) \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \arccos x < \pi/2$ per ogni $x \in]0,1]$, si ha che

$$0 \leq \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) < \frac{\pi}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{1}$$

Allora $\min \mathcal{A} = 0$, perché

$$\left.\frac{1}{n+1}\right|_{n=0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left.\arccos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|_{n=0} = 0\,,$$

da cui si ottiene che 0 è un minorante di $\mathcal{A}$ che appartiene ad $\mathcal{A}$. Per verificare che $\sup \mathcal{A} = \pi/2$, poiché (1) dice che $\pi/2$ è un maggiorante di $\mathcal{A}$, è sufficiente provare che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right) > \frac{\pi}{2} - \varepsilon\,. \tag{2}$$

Se $\varepsilon \geq \pi/2$, allora (2) è banalmente verificata perché $\arccos(1/(n+1)) \geq 0$. Se $\varepsilon < \pi/2$, allora (2) è verificata se e solo se

$$\frac{1}{n+1} < \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\,,$$

per cui, per l'archimedeità di $\mathbb{R}$, basta prendere

$$n > \frac{1}{\cos(\pi/2 - \varepsilon)} - 1\,.$$

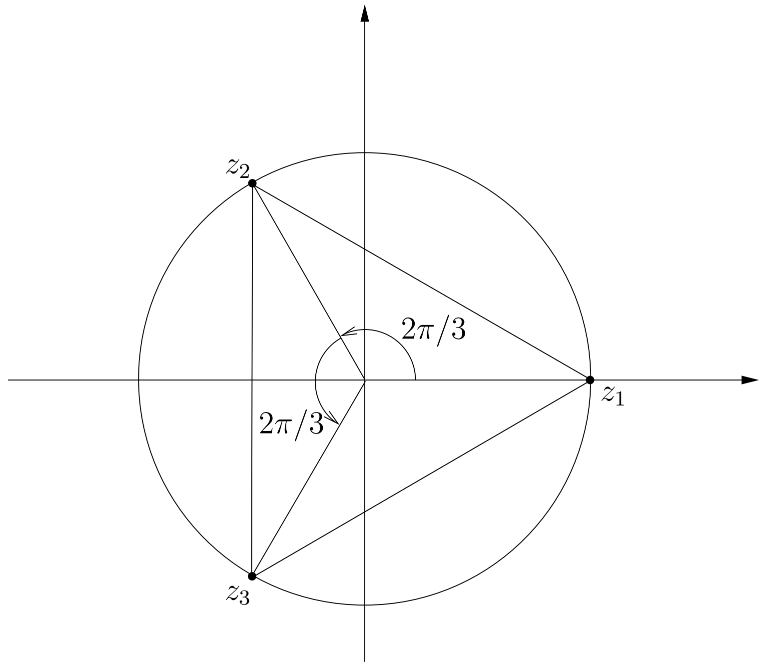

Figura 2: Esercizio 1

Esercizio 3

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \log(1 + \sin^3 x) - x^3 + 3^{-1/|x|} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt[4]{1 + \arctan x^3} - 1\,.$$

Si calcoli l'ordine di infinitesimo di g per $x \to 0$ e si dica se $f = o(g)$ oppure $g = o(f)$ per $x \to 0$.

Svolgimento

Poiché $3^{-1/|x|} = o(x^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1 + \sin^3 x) - x^3 + 3^{-1/|x|} \\ &= \sin^3 x + o(\sin^3 x) - x^3 + 3^{-1/|x|} \\ &= x^3 + o(x^3) - x^3 + o(x^3) \\ &= o(x^3)\,. \end{aligned}$$

Per g si ha

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt[4]{1 + \arctan x^3} - 1 = \left[1 + \arctan x^3\right]^{1/4} - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{4}\arctan x^3 + o(\arctan x^3) - 1 = \frac{1}{4}\left[x^3 + o(x^3)\right] + o(x^3) \\ &= \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\,, \end{aligned}$$

da cui si ricava che l'ordine di infinitesimo di g è 3. Infatti, usando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi, si ha

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{g(x)}{x^3}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{(1/4)x^3+o(x^3)}{x^3}\right| = \frac{1}{4}\,.$$

Dal fatto che $f = o(x^3)$ si ricava che $f = o(g)$. Infatti, sempre usando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{1/4)x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0} 4\,\frac{o(x^3)}{x^3} = 0\,.$$

Esercizio 4

Si dica se la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x^4) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in zero.

Svolgimento

Poiché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\log(1+x^4) = 0 \neq 1 = f(0)\,,$$

f non è continua in $x = 0$. Pertanto non è neanche derivabile.

Esercizio facoltativo

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x) = 2x^2 - 1$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$. Quanto vale $f(\sqrt{5})$?

Svolgimento

Presa una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri razionali che converge a $\sqrt{5}$, poiché f è continua si ha

$$f(\sqrt{5}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[2x_n^2 - 1\right] = 2(\sqrt{5})^2 - 1 = 9\,.$$