

# Secondo compito 2003/2004 - Tema 1

## Esercizio 1

Studiare la funzione

$$f(x) = |2x + 1| e^{\frac{1}{x}}$$

(determinare il dominio  $D$ ; calcolare i limiti per  $x$  che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; studiare la monotonia di  $f$  e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui  $f$  è derivabile e calcolare i limiti di  $f'$  per  $x$  che tende agli estremi del suo dominio; [facoltativo: studiarne la convessità e gli eventuali flessi]; disegnare un abbozzo motivato del grafico di  $f$ ).

## Svolgimento

**Dominio:**  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , per evidenti ragioni. Inoltre  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathcal{D}$  e si annulla solo in  $x = -1/2$ , che quindi è punto di minimo assoluto.

**Limiti ed eventuali asintoti:** Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

e dunque la retta  $x = 0$  è asintoto verticale. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} e^{1/x} = 2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x(e^{1/x} - 1) + e^{1/x}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2x \left( \frac{1}{x} + o(1/x) \right) + e^{1/x} \right] = 3, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-1}{x} e^{1/x} = -2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x(1 - e^{1/x}) - e^{1/x}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2x \left( -\frac{1}{x} + o(1/x) \right) - e^{1/x} \right] = -3, \end{aligned}$$

Si ottiene che

1. la retta di equazione  $y = 2x + 3$  è asintoto obliquo a  $+\infty$ ;
2. la retta di equazione  $y = -2x - 3$  è asintoto obliquo a  $-\infty$ .

**Derivata prima:** La funzione è derivabile in  $\mathcal{D}' \doteq \mathcal{D} \setminus \{-1/2\}$ , perché  $x \mapsto |2x + 1|$  non è derivabile in  $x = -1/2$ . Per  $x \in \mathcal{D}'$  si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \operatorname{sgn}(2x+1) e^{1/x} - \frac{1}{x^2} |2x+1| e^{1/x} \\ &= \operatorname{sgn}(2x+1) e^{1/x} \left[ 2 - \frac{2x+1}{x^2} \right] = \operatorname{sgn}(2x+1) e^{1/x} \cdot \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2}, \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che  $|2x + 1| = \operatorname{sgn}(2x + 1)(2x + 1)$ . Poiché

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1/2-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -1/2-} -e^{1/x} \cdot \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2} = -2e^{-2} \\ \lim_{x \rightarrow -1/2+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -1/2+} e^{1/x} \cdot \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2} = 2e^{-2},\end{aligned}$$

il punto  $x = -1/2$  è punto angoloso per  $f$ . Studiamo ora il segno di  $f'$ . Se  $x \in \mathcal{D}'$ , allora

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sgn}(2x + 1) \cdot (2x^2 - 2x - 1) \geq 0.$$

Poiché

$$2x^2 - 2x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

si ottiene che

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

ed inoltre

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Ne consegue che

1. il punto  $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$  è di massimo relativo;
2. il punto  $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  è di minimo relativo.

Inoltre

$$\begin{aligned}f &\text{ è crescente in } \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right] \quad \text{e in } \left[ \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, +\infty \right[ , \\ f &\text{ è decrescente in } \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \quad \text{in } \left[ \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, 0 \right[ \quad \text{e in } \left] 0, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right].\end{aligned}$$

**Derivata seconda:**  $f'$  è derivabile in  $\mathcal{D}'$  perché prodotto di funzioni derivabili. Si ha

$$\begin{aligned}f''(x) &= \operatorname{sgn}(2x + 1) D \left[ e^{1/x} \left( 2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \right] \\ &= \operatorname{sgn}(2x + 1) e^{1/x} \left[ -\frac{1}{x^2} \left( 2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) + \left( \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \right] \\ &= \operatorname{sgn}(2x + 1) \frac{e^{1/x}}{x^4} (4x + 1).\end{aligned}$$

Allora

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(2x+1) \cdot (4x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \text{ o } x \geq -\frac{1}{4}.$$

Se ne deduce che

$$f \text{ è convessa in } \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right], \text{ in } \left[ -\frac{1}{4}, 0 \right[ \text{ e in } ]0, +\infty[ ,$$

$$f \text{ è concava in } \left[ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right] .$$

Ne consegue che i punti  $x = -1/2$  e  $x = -1/4$  sono punti di flesso per  $f$ . Un abbozzo del grafico è riportato in figura 1.

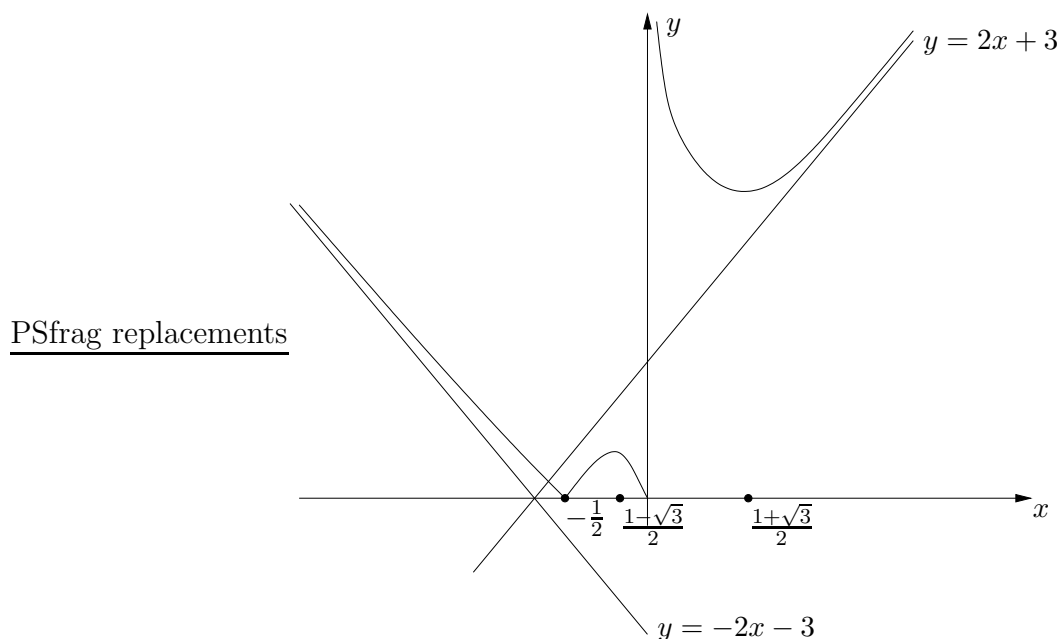


Figura 1: Esercizio 1

## Esercizio 2

Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^{3/2}}.$$

### Svolgimento

Poiché la serie è a termini positivi, si può usare il Criterio asintotico della Radice, ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^{3/2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = \frac{2}{e} < 1,$$

e dunque la serie converge.

### Esercizio 3

Data l'equazione differenziale

$$y' = (y + 2)(y + 1) \tan x,$$

- a) se ne trovino tutte le soluzioni costanti;
- b) se ne trovi (esplicitamente) la soluzione che soddisfa la condizione iniziale  $y(\pi) = 2$ .

#### Svolgimento

- a) Le soluzioni costanti si trovano imponendo che

$$(y + 2)(y + 1) = 0.$$

Quindi  $y : x \mapsto -2$  e  $y : x \mapsto -1$  sono le soluzioni cercate.

- b) Deve essere

$$\int \frac{dy}{(y + 2)(y + 1)} = \int \tan x \, dx.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(y + 2)(y + 1)} &= \int \left( \frac{1}{y + 1} - \frac{1}{y + 2} \right) dy = \log \left| \frac{y + 1}{y + 2} \right| + c, \\ \int \tan x \, dx &= -\log |\cos x| + c, \end{aligned}$$

si ricava che

$$\log \left| \frac{y(x) + 1}{y(x) + 2} \right| = -\log |\cos x| + c. \quad (1)$$

Imponendo che  $y(\pi) = 2$ , si ha

$$\log \left| \frac{2 + 1}{2 + 2} \right| = -\log |\cos \pi| + c \quad \Rightarrow \quad c = \log \frac{3}{4}.$$

Sostituendo in (1) e osservando che  $\frac{y(x) + 1}{y(x) + 2} \geq 0$  per  $x = \pi$ , si ottiene

$$\frac{y(x) + 1}{y(x) + 2} = \frac{3}{4} \frac{1}{|\cos x|}$$

da cui si ricava

$$y(x) = \frac{6 - 4|\cos x|}{4|\cos x| - 3}.$$

## Esercizio facoltativo

Sia data la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Posto  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , si determini l'insieme dei punti in cui  $F$  è derivabile.

### Svolgimento

Poiché  $f$  è continua in  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , il Teorema Fondamentale del Calcolo ci assicura che  $F$  è derivabile in tale insieme e che vale

$$F'(x) = \arctan \frac{1}{x-1} \quad \forall x \neq 1.$$

Inoltre, essendo  $F$  continua in tutto  $\mathbb{R}$ , usando il Teorema del limite della derivata, si ottiene che

$$F'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F'(x) = -\frac{\pi}{2},$$

$$F'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F'(x) = \frac{\pi}{2},$$

e quindi  $F$  ha in  $x = 1$  un punto angoloso e non è derivabile in tale punto.