

MATEMATICA A
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta – 9.12.2003 – a.a. **782°**

TEMA 1 - P

1) [10 punti] Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos |x^2 - 3x + 2|$$

(determinare il dominio D ; studiare la continuità e la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile e calcolare i limiti di f' per x che tende agli estremi del suo dominio; **non è richiesto lo studio della derivata seconda**; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

2) [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-3} \arctan \frac{1}{x^{2\alpha}}}.$$

- a) Si calcoli una primitiva di f nel caso $\alpha = 0$.
- b) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che f è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ e, per tali α , si calcoli l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow +\infty$.
- c) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ risulti convergente.
- d) Lo si calcoli, se possibile, nel caso $\alpha = 0$.

3) [6 punti] Date l'equazione differenziale

(1)
$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

e la funzione $\varphi(x) = ax^2e^{-x}$ ($a \in \mathbb{R}$),

- a) si determini a in modo che φ sia soluzione di (1);
- b) si determini la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

4) [4 punti] Si determini il dominio della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(|z| - i)(z^2 - 2z + 5)}.$$

5) **Facoltativo, da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi.** Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 che soddisfa l'equazione:

$$u(x) = \pi + \int_0^x t \cos(u(t)) dt.$$

Si calcoli $u'(0)$.

Tempo: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

MATEMATICA A
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta – 9.12.2003 – a.a. **782°**

TEMA 2 - P

1) [10 punti] Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos |x^2 - x|$$

(determinare il dominio D ; studiare la continuità e la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile e calcolare i limiti di f' per x che tende agli estremi del suo dominio; **non è richiesto lo studio della derivata seconda**; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

2) [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-4} \sinh \frac{1}{x^{3\alpha}}}.$$

- a) Si calcoli una primitiva di f nel caso $\alpha = 0$.
- b) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che f è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ e, per tali α , si calcoli l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow +\infty$.
- c) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che $\int_5^{+\infty} f(x) dx$ risulti convergente.
- d) Lo si calcoli, se possibile, nel caso $\alpha = 0$.

3) [6 punti] Date l'equazione differenziale

$$(*) \quad y'' - 2y' + y = e^x$$

e la funzione $\varphi(x) = ax^2e^x$ ($a \in \mathbb{R}$),

- a) si determini a in modo che φ sia soluzione di (*);
- b) si determini la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

4) [4 punti] Si determini il dominio della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(2|z| - i)(z^2 - 2z + 10)}.$$

5) **Facoltativo, da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi.** Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 che soddisfa l'equazione:

$$u(x) = \frac{\pi}{2} + \int_0^x t \sin(u(t)) dt.$$

Si calcoli $u'(0)$.

Tempo: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

MATEMATICA A
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta – 9.12.2003 – a.a. **782°**

TEMA 3 - P

1) [10 punti] Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos |x^2 + 3x + 2|$$

(determinare il dominio D ; studiare la continuità e la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile e calcolare i limiti di f' per x che tende agli estremi del suo dominio; **non è richiesto lo studio della derivata seconda**; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

2) [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-5} \log(1 + \frac{1}{x^{\alpha/2}})}.$$

- a) Si calcoli una primitiva di f nel caso $\alpha = 0$.
- b) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che f è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ e, per tali α , si calcoli l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow +\infty$.
- c) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che $\int_6^{+\infty} f(x) dx$ risulti convergente.
- d) Lo si calcoli, se possibile, nel caso $\alpha = 0$.

3) [6 punti] Date l'equazione differenziale

(*)
$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$$

e la funzione $\varphi(x) = ax^2e^{-2x}$ ($a \in \mathbb{R}$),

- a) si determini a in modo che φ sia soluzione di (*);
- b) si determini la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

4) [4 punti] Si determini il dominio della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(|z| - 2i)(z^2 + 4z + 8)}.$$

5) **Facoltativo, da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi.** Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 che soddisfa l'equazione:

$$u(x) = 1 + \int_0^x t \arctan(u(t)) dt.$$

Si calcoli $u'(0)$.

Tempo: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

MATEMATICA A
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta – 9.12.2003 – a.a. **782°**

TEMA 4 - P

1) [10 punti] Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos |2x^2 - 3x + 1|$$

(determinare il dominio D ; studiare la continuità e la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile e calcolare i limiti di f' per x che tende agli estremi del suo dominio; **non è richiesto lo studio della derivata seconda**; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

2) [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-2} \sin \frac{1}{x^{\alpha/3}}}.$$

- a) Si calcoli una primitiva di f nel caso $\alpha = 0$.
- b) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che f è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ e, per tali α , si calcoli l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow +\infty$.
- c) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che $\int_3^{+\infty} f(x) dx$ risulti convergente.
- d) Lo si calcoli, se possibile, nel caso $\alpha = 0$.

3) [6 punti] Date l'equazione differenziale

$$(*) \quad y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

e la funzione $\varphi(x) = ax^2 e^{2x}$ ($a \in \mathbb{R}$),

- a) si determini a in modo che φ sia soluzione di (*);
- b) si determini la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

4) [4 punti] Si determini il dominio della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(2|z| - 3i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 12)}.$$

5) **Facoltativo, da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi.** Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ che soddisfa l'equazione:

$$u(x) = \frac{\pi}{3} + \int_0^x t \tan(u(t)) dt.$$

Si calcoli $u'(0)$.

Tempo: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.