Primo appello 2004/2005 - Tema 2

Esercizio 1

Risolvere l'equazione nella variabile $z \in \mathbb{C}$

$$2iz\overline{z} + iz^2 = 4z + 21i\,. \tag{1}$$

Svolgimento

Poniamo $z = x + iy$. Si ottiene che deve valere

$$2i(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2 + 2ixy) = 4x + 4iy + 21i\,,$$

da cui

$$-2xy - 4x + i\big[3x^2 + y^2 - 4y - 21\big] = 0\,.$$

Allora il problema si riconduce a risolvere il sistema nelle incognite $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x(y+2) = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

La prima equazione ha come soluzioni $x = 0$ e $y = -2$. Nel primo caso, $x = 0$, sostituendo nella seconda equazione si ottiene

$$y^2 - 4y - 21 = 0\,, \tag{3}$$

che ha soluzioni

$$y_1 = 2 + \sqrt{4 + 21} = 7\,, \qquad y_2 = 2 - \sqrt{4+21} = -3\,,$$

e quindi

$$z_1 = 7i\,, \qquad z_2 = -3i$$

sono soluzioni di (1). Nel secondo caso, $y = -2$, sostituendo nella seconda equazione si ottiene

$$3x^2 - 9 = 0$$

che ha come soluzioni $x_1 = \sqrt{3}$ e $x_2 = -\sqrt{3}$, e quindi

$$z_3 = \sqrt{3} - 2i\,, \qquad z_4 = -\sqrt{3} - 2i$$

sono altre due soluzioni di (1).

Esercizio 2

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x} - 2x\,.$$

[Dominio, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico]

Svolgimento

Dominio: Deve essere $4x^2 + x \geq 0$ e dunque

$$\mathcal{D} =]-\infty, -1/4] \cup [0, +\infty[\,.$$

La funzione è continua in $\mathcal{D}$ perché somma e composizione di funzioni continue.
Segno: Dobbiamo risolvere in $\mathcal{D}$ la disequazione

$$\sqrt{4x^2 + x} \geq 2x\,. \tag{4}$$

Se $x \leq -1/4$ la disequazione è banalmente verificata. Se $x \geq 0$, possiamo elevare al quadrato ambi i membri di (4) ottenendo

$$4x^2 + x \geq 4x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 0\,.$$

Dunque (4) è verificata per ogni $x \in \mathcal{D}$, e dunque $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$. In particolare, $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, che quindi risulta punto di minimo assoluto.
Limiti ed eventuali asintoti: Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+x} - 2x\right) \cdot \frac{\sqrt{4x^2+x}+2x}{\sqrt{4x^2+x}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x\sqrt{1+1/(4x)}+2x} = \frac{1}{4}\,, \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty\,,
\end{aligned}$$

e dunque la retta di equazione $y = 1/4$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, mentre la funzione non ha asintoti verticali. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui a $-\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[-\sqrt{\frac{4x^2+x}{x^2}} - 2\right] \\
&= -4\,, \\
\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) + 4x\right] &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+x} + 2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+x} + 2x\right) \cdot \frac{\sqrt{4x^2+x}-2x}{\sqrt{4x^2+x}-2x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x}-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-2x\sqrt{1+1/(4x)}-2x} \\
&= -\frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Ne consegue che la retta di equazione $y = -4x - 1/4$ è asintoto obliquo a $-\infty$.
Derivata prima: Poiché $x \mapsto \sqrt{4x^2+x}$ non è derivabile quando il radicando è nullo, f risulta derivabile in

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \left\{-\frac{1}{4}, 0\right\}$$

perché somma di funzioni derivabili. Per $x \in \mathcal{D}'$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+x}} \cdot (8x+1) - 2 = \frac{8x+1-4\sqrt{4x^2+x}}{2\sqrt{4x^2+x}},$$

e risulta

$$\lim_{x\to -1/4^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 8x+1 \geq 4\sqrt{4x^2+x}.$$

Osserviamo che se $x < -1/4$ la disequazione non è mai verificata poiché $8x+1<0$. Nel caso in cui $x > 0$, possiamo elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo

$$64x^2 + 16x + 1 \geq 64x^2 + 16x \qquad \Rightarrow \qquad 1 \geq 0,$$

che è sempre verificata. In particolare, f' non si annulla mai. Ne consegue che

$$\begin{array}{lll} f & \text{è crescente in} & [0,+\infty[\,, \\ f & \text{è decrescente in} &]-\infty,-1/4[\,, \end{array}$$

ed inoltre $x = -1/4$ è punto di minimo relativo, mentre $x = 0$ è punto di minimo assoluto (come già osservato). Un abbozzo del grafico è riportato in figura 1.

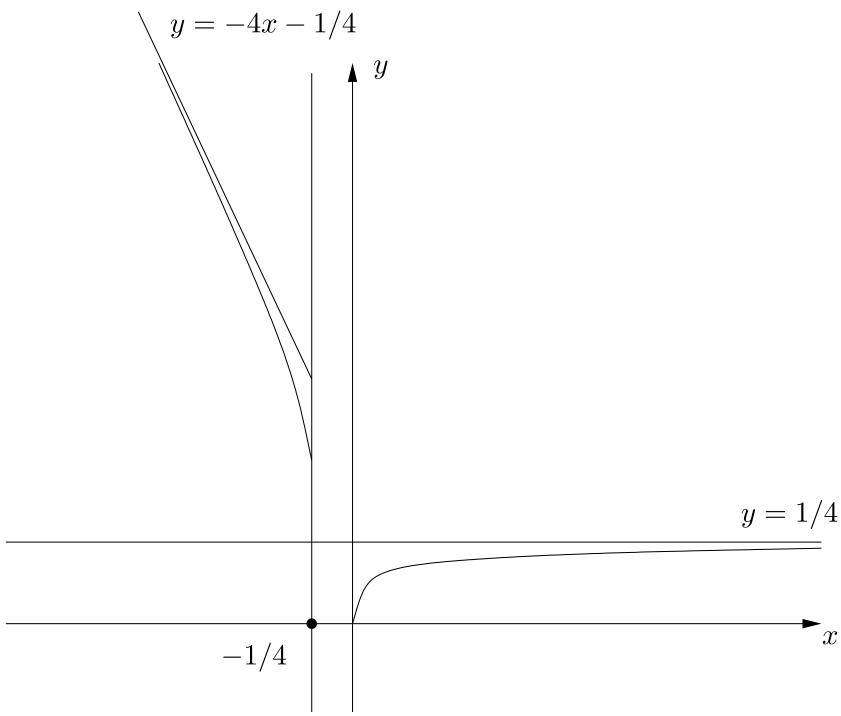

Figura 1: Esercizio 2

Esercizio 3

Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (3b-1)\sinh x - 2(a+1)\cos 3x & \text{se} \quad -1 \le x \le 0, \\ b(x^2+x) - (a+1)\sin\frac{1}{x} & \text{se} \quad 0 < x \le 1, \end{cases}$$

sia derivabile in $x_0 = 0$.

Svolgimento

Per prima cosa verifichiamo che f sia continua in $x_0 = 0$, cioé che valgano

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -2(a+1)\,. \tag{5}$$

Poichè, per la presenza del termine $\sin(1/x)$ il limite da destra in $x_0 = 0$ non esiste se $(a+1) \neq 0$, affinché (5) sia verificata deve essere $(a+1) = 0$, e quindi $a = -1$. A questo punto f diventa

$$f(x) = \begin{cases} (3b-1)\sinh x & \text{se} \quad -1 \le x \le 0, \\ b(x^2+x) & \text{se} \quad 0 < x \le 1, \end{cases}$$

che è banalmente continua in 0 e derivabile per $x \neq 0$. Inoltre

$$f'(x) = \begin{cases} (3b-1)\cosh x & \text{se} \quad -1 \le x < 0, \\ b(2x+1) & \text{se} \quad 0 < x \le 1, \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 3b-1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = b\,.$$

Per il teorema del limite della derivata, affinché f sia derivabile in $x_0 = 0$ deve essere

$$3b - 1 = b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 4

Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \left| \sinh\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right| .$$

Svolgimento

Chiamiamo a_n il termine generale della serie. Poiché

$$\sinh\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n} + o(1/n^2) - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}} + o(1/n^{2\alpha})$$

si ha

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n}\left|-\dfrac{1}{n^\alpha} + o(1/n^\alpha)\right| = \dfrac{1}{n^{\alpha-1/2}} + o(1/n^{\alpha-1/2}) & \text{se} \quad \alpha < 1\,, \\ \sqrt{n}\left|\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2} + o(1/n^2)\right| = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^{3/2}} + o(1/n^{3/2}) & \text{se} \quad \alpha = 1\,, \\ \sqrt{n}\left|\dfrac{1}{n} + o(1/n)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o(1/\sqrt{n}) & \text{se} \quad \alpha > 1\,. \end{cases}$$

Ne consegue che

1. Se $\alpha < 1$, si può confrontare la serie data con quella di termine generale $1/n^{\alpha-1/2}$, ottenendo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^{\alpha-1/2}} \overset{\text{PdS}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^{\alpha-1/2}}{1/n^{\alpha-1/2}} = 1\,.$$
Poiché tale serie diverge, il criterio asintotico del confronto ci permette di concludere che anche la serie data diverge.

2. Se $\alpha = 1$, si può confrontare la serie data con quella di termine generale $1/n^{3/2}$, ottenendo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^{3/2}} \overset{\text{PdS}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1/n^{3/2}}{1/n^{3/2}} = \frac{1}{2}\,.$$
Poiché tale serie converge, il criterio asintotico del confronto ci permette di concludere che anche la serie data converge.

3. Se $\alpha > 1$, si può confrontare la serie data con quella di termine generale $1/\sqrt{n}$, ottenendo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/\sqrt{n}} \overset{\text{PdS}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/\sqrt{n}} = 1\,.$$
Poiché tale serie diverge, il criterio asintotico del confronto ci permette di concludere che anche la serie data diverge.

Esercizio facoltativo

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione tale che

$$f(x) = x^3 + o(x^3) \quad \text{per} \quad x \to 0\,. \tag{6}$$

Allora, in generale, è vero o falso che $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$?

Svolgimento

È falso. Basta prendere $f(x) = \sin x^3$, che soddisfa (6) ma non ha limite a $-\infty$.