Secondo appello 2004/2005 - Tema 1

Esercizio 1

Risolvere l'equazione di variabile complessa

$$z^2 - \frac{(z-\overline{z})^2}{4} + (\operatorname{Re} z)\big[\operatorname{Im}(z^2)\big] = 0\,, \tag{1}$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento

Poniamo $z = x + iy$. Si ottiene che deve valere

$$x^2 - y^2 + 2ixy - \frac{(2iy)^2}{4} + x\operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 0\,,$$

da cui

$$x^2 - y^2 + 2ixy + y^2 + 2x^2y = 0\,.$$

Allora il problema si riconduce a risolvere il sistema nelle incognite $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^2(2y+1) = 0 \\ xy = 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

che ha come soluzioni i punti della retta $x = 0$, cioé l'asse immaginario. Quindi le soluzioni di (1) sono tutti e soli i numeri complessi del tipo $z = iy$, con $y \in \mathbb{R}$ (vedi figura 1).

Esercizio 2

Sia

$$f(x) := \arctan\left(xe^{\frac{1}{x+1}}\right)\,.$$

i) Determinare il dominio D di f, il segno di f ed il comportamento agli estremi di D (compresi eventuali asintoti).

ii) Dire in quali parti di D la funzione è continua e dove è derivabile. Calcolare, per tali punti, f'.

iii) Determinare la monotonia di f ed invididuare eventuali massimi e minimi, specificando se si tratta di estremi relativi (locali) o assoluti (globali).

iv) Con le informazioni raccolte tracciare un grafico di f.

v) **Facoltativo:** dire, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \alpha.$$

Giustificare rigorosamente la risposta.

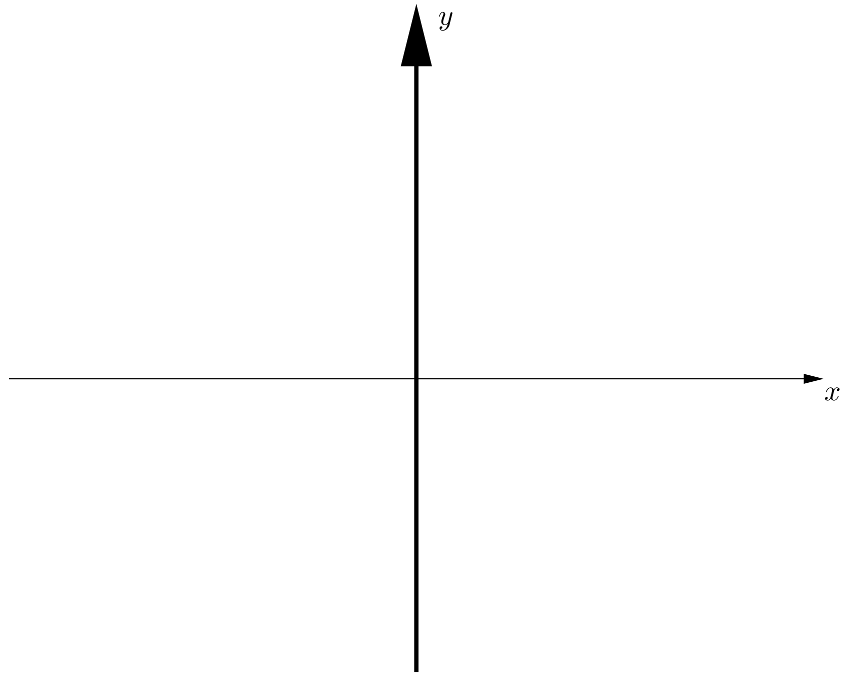

Figura 1: Esercizio 1

Svolgimento

Dominio: Deve essere $x + 1 \neq 0$ e dunque

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.$$

La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathcal{D}$ perché composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Segno: Poiché $\arctan y \geq 0$ se e solo se $y \geq 0$ e $e^{\frac{1}{x+1}} > 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$, segue che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ solo per $x = 0$.
Limiti ed eventuali asintoti: Essendo $|\arctan y| < \pi/2$, segue che $|f(x)| < \pi/2$ per ogni $x \in \mathcal{D}$ e quindi f non ha asintoti verticali. Poiché

$$\lim_{x\to -1^-} xe^{\frac{1}{x+1}} \overset{t=1/(x+1)}{=} \lim_{t\to-\infty} \frac{1-t}{t} e^t = 0\,, \qquad \lim_{x\to -1^+} xe^{\frac{1}{x+1}} \overset{y=1/(x+1)}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{1-y}{y} e^y = -\infty\,,$$

si ha che

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} xe^{\frac{1}{x+1}} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x+1}} = -\infty\,,$$

da cui si ricava

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

e quindi la retta di equazione $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, mentre la retta di equazione $y = -\pi/2$ è asintoto orizzontale a $-\infty$. È inutile ricercare eventuali asintoti obliqui.

Derivata prima: Per $x \in \mathcal{D}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2 e^{\frac{2}{x+1}}} e^{\frac{1}{x+1}} \left(1 - \frac{x}{(x+1)^2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{1+x^2 e^{\frac{2}{x+1}}} \cdot \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} .$$

e quindi risulta

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x+1 > 0 ,$$

che è verificata per ogni $x \in \mathcal{D}$. Quindi f è strettamente crescente in $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$. La funzione non ha punti di estremo relativo o assoluto. Si ha inoltre

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} f'(x) = 0 ,$$

che sono utili per disegnare un abbozzo del grafico (vedi figura 2).

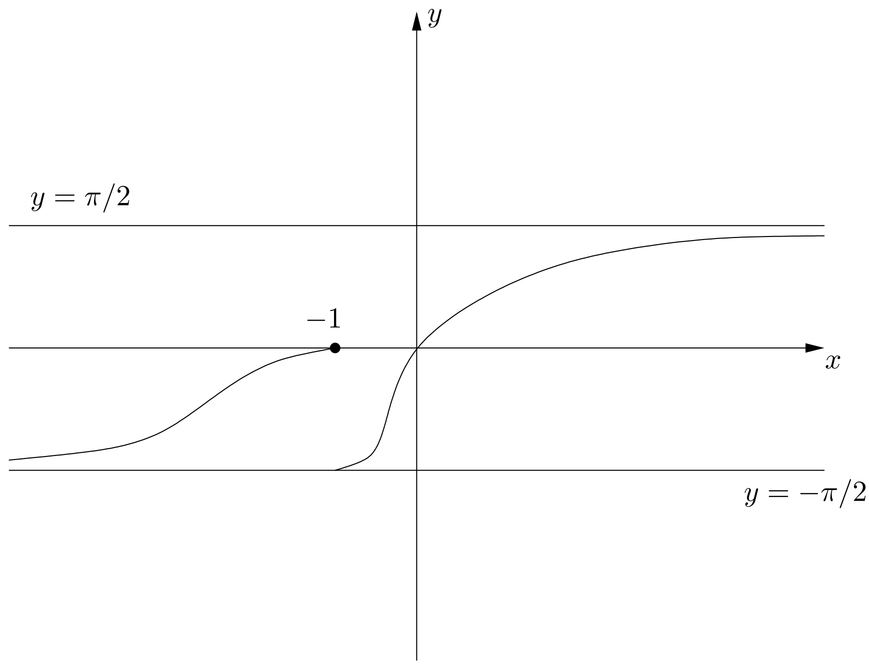

Figura 2: Esercizio 2

Veniamo all'ultimo punto. Essendo $|f(x)| < \pi/2$, l'equazione $f(x) = \alpha$ non ha soluzioni per $|\alpha| \geq \pi/2$. Se $-\pi/2 < \alpha < 0$, il teorema dei valori intermedi ci dice che l'equazione $f(x) = \alpha$ ha due soluzioni:

1. una appartiene all'intervallo $]-\infty, -1[$. Infatti

$$\inf_{]-\infty,-1[} f(x) = -\frac{\pi}{2} , \qquad \sup_{]-\infty,-1[} f(x) = 0 ,$$

   e quindi $f(x) = \alpha$ ha almeno una soluzione essendo f continua. In più tale soluzione è unica, essendo f strettamente crescente e dunque iniettiva in $]-\infty, -1[$.

2. una seconda soluzione appartiene all'intervallo $]-1,0[$, per ragioni identiche a quelle menzionate sopra.

Poiché $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$, l'equazione non ha soluzioni nell'intervallo $[0,+\infty[$ qualora $\alpha \leq 0$. Se $0 \leq \alpha < \pi/2$, l'equazione ha esattamente una soluzione appartenente all'intervallo $[0,+\infty[$. Infatti, non può avere soluzioni in $]-\infty,0[$ essendo in tale intervallo f negativa. Inoltre, in $[0,+\infty[$ la funzione è continua e quindi per il teorema dei valori intermedi assume tutti i valori compresi fra il suo minimo, che è 0, e il suo estremo superiore, che è $\pi/2$. Qundi $f(x) = \alpha$ ha una soluzione. Tale soluzione è unica essendo f strettamente crescente e dunque iniettiva in $[0,+\infty[$.

Esercizio 3

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (y^2 - 2y + 10)\arctan x\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Svolgimento

Poiché

$$(y^2 - 2y + 10)\Big|_{y=1} = 9 \neq 0\,,$$

possiamo procedere per separazione di variabili. Si ottiene

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{y^2 - 2y + 10}\,dy = \int_0^x \arctan t\,dt\,.$$

Calcoliamo i due integrali.

$$\begin{aligned} \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{y^2 - 2y + 10}\,dy &= \int_1^{y(x)} \frac{1}{(y-1)^2 + 9} = \frac{1}{9}\int_1^{y(x)} \frac{1}{\big[(y-1)/3\big]^2 + 1} \\ &= \frac{1}{3}\arctan\frac{y-1}{3}\Big|_1^{y(x)} = \frac{1}{3}\arctan\frac{y(x)-1}{3}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \arctan t\,dt &= t\arctan t\Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+t^2\right)\Big|_0^x = x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\,. \end{aligned}$$

Quindi deve essere

$$\frac{1}{3}\arctan\frac{y(x)-1}{3} = x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\,,$$

da cui si ottiene

$$y(x) = 1 + 3\tan\left[3\left(x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)\right]\,.$$

Esercizio 4

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - \sinh(x^2)}{x^2 \left[\log(1+2x^4) - (\cos(2x^2) - 1)\right]} \, .$$

Svolgimento

Poiché

$$\sin x^2 = \; x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + o(x^8)\,, \qquad \sinh x^2 = \; x^2 + \frac{1}{3!}x^6 + o(x^8)\,,$$

$$\log(1+2x^4) = \; 2x^4 + o(x^4)\,, \qquad \cos(2x^2) - 1 = \; -\frac{1}{2}(2x^2)^2 + o(x^4)\,,$$

si ha

$$\sin x^2 - \sinh x^2 = -\frac{1}{3}x^6 + o(x^8)\,, \qquad \log(1+2x^4) - \big(\cos(2x^2) - 1\big) = 4x^4 + o(x^4)\,.$$

Si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - \sinh(x^2)}{x^2 \left[\log(1+2x^4) - (\cos(2x^2) - 1)\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^6 + o(x^8)}{4x^6 + o(x^6)} \overset{\text{P.d.S.}}{=} -\frac{1}{12}\,.$$