Terzo appello 2004/2005 - Tema 1

Esercizio 1

Data la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = 7\bar{z} + i$$

calcolare le radici terze del numero complesso $w = f(-i)$.

Svolgimento

Si ha

$$w = f(-i) = 7(\overline{-i}) + i = 7i + i = 8i\,.$$

Banalmente, una delle radici terze è $-2i$; le altre si trovano osservando che sul piano di Gauss le tre radici corrispondono ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 2 (vedi figura 1). Si ottiene

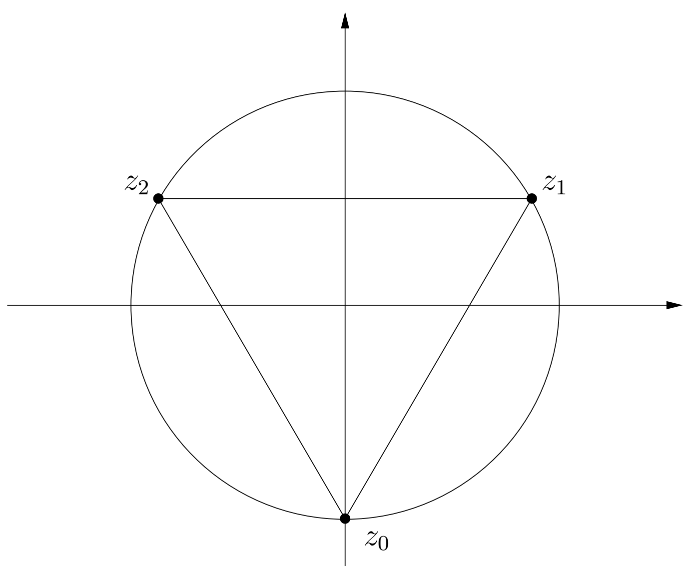

Figura 1: Esercizio 1

$$z_0 = -2i\,, \qquad z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i\,, \qquad z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i\,.$$

Esercizio 2

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{1/4} \cdot \log^3(x-1) & \text{se} \quad x \neq 1\,, \\ 0 & \text{se} \quad x = 1\,. \end{cases}$$

[Dominio, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo ed assoluto, eventuali punti di flesso orizzontale, abbozzo del grafico; **non è richiesto lo studio della derivata seconda**]

Svolgimento

Dominio: Si osservi che

1. $x \mapsto \log(x-1)$ è definita per $x-1>0$, dunque per $x>1$;
2. $x \mapsto (x-1)^{1/4}$ è definita per $x-1 \geq 0$, dunque per $x \geq 1$.

Quindi, $x \mapsto (x-1)^{1/4} \cdot \log^3(x-1)$ è definita per $x>1$. Poiché la funzione f è definita anche per $x=1$ si ottiene

$$\mathcal{D} = [1, +\infty[\,.$$

La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathcal{D} \setminus \{1\}$ perché composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$. Inoltre, poiché

$$\lim_{x \to 1+} (x-1)^{1/4} \cdot \log^3(x-1) = 0 = f(1)$$

f risulta continua in $\mathcal{D}$.
Segno: Poiché $(x-1)^{1/4} \geq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$, si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $\log^3(x-1) \geq 0$, cioè se e solo se $x-1 \geq 1$, da cui $x \geq 2$. Dunque risulta

- $f(x) > 0$ se e solo se $x > 2$;
- $f(x) < 0$ se e solo se $1 < x < 2$;
- $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ oppure $x = 2$.

Limiti ed eventuali asintoti: Poiché facilmente si vede che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x^4}\right)^{1/4} \log^3(x-1) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\log^{12}(x-1)}{x^3} - \frac{\log^{12}(x-1)}{x^4}\right)^{1/4} = 0\,,\end{aligned}$$

la funzione non ha asintoti orizzontali o obliqui. Inoltre, poiché f è continua nel suo dominio e non ci sono punti di accumulazione di $\mathcal{D}$ esterni ad esso, f non ha asintoti verticali.
Derivata prima: Per $x \in \mathcal{D} \setminus \{1\}$ si ha

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{4}(x-1)^{-3/4} \cdot \log^3(x-1) + (x-1)^{1/4} \cdot 3\log^2(x-1) \cdot \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{\log^2(x-1)}{(x-1)^{3/4}} \cdot \left[\frac{1}{4}\log(x-1) + 3\right]\,.\end{aligned}$$

e quindi risulta

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log^2(x-1) \cdot \left[\frac{1}{4}\log(x-1) + 3\right] \geq 0\,,$$

che è verificata se e solo se

$$x = 2 \quad \text{oppure} \quad x - 1 \geq e^{-12} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2 \quad \text{oppure} \quad x \geq 1 + e^{-12}\,.$$

Se ne deduce che

- f è strettamente crescente in $[1 + e^{-12}, +\infty[$;
- f è strettamente decrescente in $[1, 1 + e^{-12}]$;
- f ha un massimo relativo in $x = 1$ ed un minimo assoluto in $x = 1 + e^{-12}$;
- f ha un punto di flesso orizzontale in $x = 2$.

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -\infty\,,$$

e quindi f non è derivabile in $x = 1$. L'abbozzo del grafico è in figura 2.

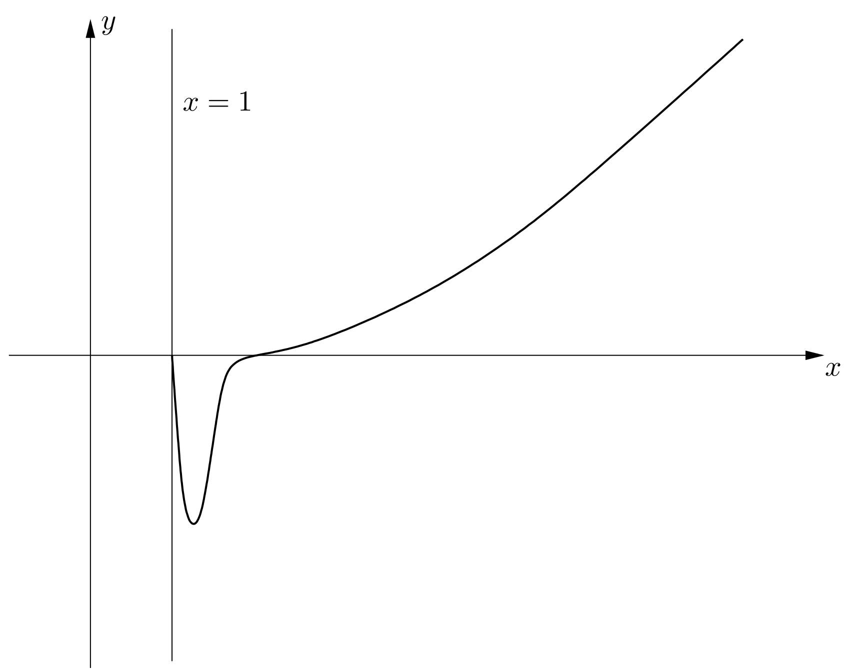

Figura 2: Esercizio 2

Esercizio 3

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^x \,, \\ y(0) = 0 \,, \quad y'(0) = 0 \,. \end{cases} \tag{1}$$

Svolgimento

L'integrale generale dell'equazione differenziale è della forma

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + \varphi(x) \,,$$

dove $\widetilde{y}(x)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 2y' + y = 0 \,, \tag{2}$$

e $\varphi(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Per calcolare $\widetilde{y}(x)$, cerchiamo le radici caratteristiche di (2), e quindi risolviamo

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \,,$$

che ha soluzioni $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Quindi

$$\widetilde{y}(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} \,,$$

con A e B costanti da determinarsi. La soluzione particolare è della forma $\varphi(x) = \alpha e^x$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ da determinarsi sostituendo φ e le sue derivate nell'equazione non omogenea. Poiché

$$\varphi'(x) = \alpha e^x \,, \qquad \varphi''(x) = \alpha e^x \,,$$

si ottiene che deve essere

$$4\alpha e^x = e^x \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4} \,,$$

da cui

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \frac{1}{4}e^x \,. \tag{3}$$

Per calcolare A e B sfruttiamo le condizioni iniziali di (1), $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Da (3) si ottiene

$$y(0) = A + \frac{1}{4} \,, \qquad y'(0) = -A + B + \frac{1}{4} \,,$$

e quindi deve essere

$$\begin{cases} A + \dfrac{1}{4} = 0 \\ -A + B + \dfrac{1}{4} = 0 \,, \end{cases}$$

da cui

$$A = -\frac{1}{4} \,, \qquad B = -\frac{1}{2} \,.$$

Allora la soluzione di (1) è

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{4}e^x \,.$$

Esercizio 4

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^3 \frac{t+2}{\left(1-\frac{t^2}{9}\right)^\alpha}\, dt\,,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Svolgimento

Poiché la funzione integranda è positiva, possiamo cercare di utilizzare il cirterio asintotico del confronto. Osserviamo che

$$f(t) \doteq \frac{t+2}{\left(1-\frac{t^2}{9}\right)^\alpha} = \frac{t+2}{\left(1-\frac{t}{3}\right)^\alpha\left(1+\frac{t}{3}\right)^\alpha}\,,$$

e quindi proviamo a confrontarla con

$$g(t) \doteq \frac{1}{(1-t/3)^\alpha}\,.$$

Si ottiene

$$\lim_{t\to 3^-}\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 3^-}\frac{t+2}{\left(1-\frac{t}{3}\right)^\alpha\left(1+\frac{t}{3}\right)^\alpha}\cdot\left(1-\frac{t}{3}\right)^\alpha = \lim_{t\to 3^-}\frac{t+2}{\left(1+\frac{t}{3}\right)^\alpha} = \frac{5}{2^\alpha} \neq 0\,,$$

e quindi l'integrale in questione converge se e solo se converge $\displaystyle\int_0^3 g(t)\, dt$, cioè se e solo se $\alpha < 1$. Per $\alpha = 1/2$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{t+2}{\left(1-\frac{t^2}{9}\right)^{1/2}}\, dt &= \lim_{\omega\to 3^-}\int_0^\omega \frac{t+2}{\left(1-\frac{t^2}{9}\right)^{1/2}}\, dt \\
&= \lim_{\omega\to 3^-}\left[\int_0^\omega \frac{t}{\left(1-\frac{t^2}{9}\right)^{1/2}}\, dt + 2\int_0^\omega \frac{1}{\left(1-\frac{t^2}{9}\right)^{1/2}}\right] \\
&= \lim_{\omega\to 3^-}\left[-\frac{9}{2}\int_0^\omega \left(-\frac{2}{9}t\right)\cdot\left(1-\frac{t^2}{9}\right)^{-1/2}\, dt + 6\int_0^\omega \frac{1/3}{\left(1-\frac{t^2}{9}\right)^{1/2}}\, dt\right] \\
&= \lim_{\omega\to 3^-}\left[-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{9}\right)^{1-1/2} + 6\arcsin\frac{t}{3}\right]_0^\omega \\
&= \lim_{\omega\to 3^-}\left[-9\left(1-\frac{\omega^2}{9}\right)^{1/2} + 9 + 6\arcsin\frac{\omega}{3}\right] = 9 + 6\arcsin 1 = 9 + 3\pi\,.
\end{aligned}$$