Quarto appello 2004/2005 - Tema 1

Esercizio 1

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2x} + \sin(e^x)}{e^{x\log x} + 3x} \,.$$

Svolgimento

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(e^x)}{x^{2x}} = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{e^{x\log x}} = 0\,,$$

usando il Principio di Sosituzione degli Infinitesimi si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2x} + \sin(e^x)}{e^{x\log x} + 3x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2x} + o(x^{2x})}{e^{x\log x} + o(e^{x\log x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2x}}{e^{x\log x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x\log x}}{e^{x\log x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log x} = +\infty\,.\end{aligned}$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}\,. \tag{1}$$

Svolgimento

Studiamo prima la convergenze assoluta, e quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}\,. \tag{2}$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{(n+1)\cdot\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} = 1\,,$$

per il criterio asintotico del confronto la serie (2) è divergente, essendo tale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\,.$$

Studiamo allora la convergenza semplice di (1) e cerchiamo di applicare il criterio di Leibniz. Per farlo dobbiamo verificare che il termine generale sia infinitesimo e che la successione definita da

$$a_n \doteq \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

sia monotona decrescente. Poiché banalmente

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} = 0\,,$$

non ci resta che verificare la decrescenza di $\{a_n\}_{n\geq 1}$, cioè che $a_{n+1} \leq a_n$:

$$0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{n+2}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

da cui

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+2}\right)} \leq \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} = a_n\,,$$

come si voleva. Dunque la serie (1) converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3

Sia data la funzione

$$f(x) = (x^2+2x-3)e^{x^2+2x}, \qquad x \in [-1,1]\,.$$

Calcolare i punti di massimo e minimo (assoluti e relativi) e i valori massimo e minimo della funzione f sull'intervallo $[-1,1]$.

Svolgimento

Per cercare i punti di massimo e minimo di f, essendo la funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $[-1,1]$, studiamone la derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+2)e^{x^2+2x} + (x^2+2x-3)(2x+2)e^{x^2+2x} \\ &= (2x+2)e^{x^2+2x}(1+x^2+2x-3) \\ &= 2(x+1)(x^2+2x-2)e^{x^2+2x}\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x^2+2x-2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \quad \text{o} \quad -1+\sqrt{3} \leq x \leq 1\,,$$

da cui si ottiene che

- f è strettamente crescente in $[-1+\sqrt{3},1]$;

- f è strettamente decrescente in $[-1, -1+\sqrt{3}]$.

Se ne deduce che

- $x = -1+\sqrt{3}$ è punto di minimo assoluto, con $f(-1+\sqrt{3}) = -e^2$;
- i punti $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di massimo relativo. Poiché
$$f(-1) = -4e^{-1} < 0 = f(1)\,,$$
risulta che $x = 1$ è punto di massimo assoluto.

Esercizio 4

Sia
$$f_\alpha(x) = \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha}, \quad x > 1\,.$$

i) Determinare le primitive di f_2 (cioè per $\alpha = 2$);
ii) Determinare per quali $\alpha > 0$ esistono i seguenti integrali generalizzati (impropri)
$$\int_1^2 f_\alpha(x)\,dx, \quad \int_2^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx, \quad \int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx\,.$$

Svolgimento

i) Per trovare le primitive di f_2, integriamo prima per parti:
$$\int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x-1} + \int \frac{1}{1+(x-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x-1}\,dx\,. \tag{3}$$
Per calcolare l'integrale risultante, operiamo la sostituzione
$$t = \sqrt{x-1}\,.$$
Si ottiene
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+(x-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x-1}\,dx &= \int \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t^2}\,dt \\ &= \int \left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right]\,dt \\ &= -\frac{1}{t} - \arctan t + c \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \arctan\sqrt{x-1} + c\,,\end{aligned} \tag{4}$$
dove c è una costante arbitraria. Da (3) e (4) si ottiene
$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{(x-1)^2}\,dx &= -\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \arctan\sqrt{x-1} + c \\ &= -\frac{x}{x-1} \cdot \arctan\sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} + c\,.\end{aligned}$$

ii) Osserviamo che $f_\alpha(x) \geq 0$ per ogni $x > 1$. Per studiare la convergenza dei tre integrali, possiamo quindi cercare di applicare il criterio asintotico del confronto. Osserviamo preliminarmente che

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^2 f_\alpha(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_2^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx \text{ convergono entrambi.} \tag{5}$$

Per studiare la convergenza di $\int_1^2 f_\alpha(x)$, confrontiamo la funzione integranda con

$$g_1(x) \doteq \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha} = \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1/2}}\,,$$

che ha integrale convergente nell'intervallo $[1,2]$ se e solo se

$$\alpha - \frac{1}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \frac{3}{2}\,.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f_\alpha(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha} \cdot \frac{(x-1)^\alpha}{\sqrt{x-1}} = 1 \neq 0\,.$$

Quindi $\int_1^2 f_\alpha(x)$ converge se e solo se $\alpha < 3/2$.

Per studiare la convergenza di $\int_2^{+\infty} f_\alpha(x)$, confrontiamo la funzione integranda con

$$g_2(x) \doteq \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,,$$

che ha integrale convergente nell'intervallo $[2,+\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$. Si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha} \cdot (x-1)^\alpha = \frac{\pi}{2} \neq 0\,.$$

Quindi $\int_2^{+\infty} f_\alpha(x)$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

Grazie a (5), $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)$ converge se e solo se $1 < \alpha < 3/2$.