Primo compitino 2004/2005 - Tema 4A

Esercizio 1

Sia data la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = i\big(2\overline{z} - |z + 2i|^2\big) + 5\,.$$

1. Trovare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Im} f(z) = 0$ e $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$. Disegnare tale insieme sul piano di Gauss.
2. Calcolare in forma algebrica le radici quarte di $[f(-5i/2)]^4$.

Svolgimento

1. Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= i\big[2(x - iy) - |x + i(y+2)|^2\big] + 5 \\ &= i\big[2x - 2iy - \big(x^2 + (y+2)^2\big)\big] + 5 \\ &= 2y + 5 - i\big[x^2 + (y+2)^2 - 2x\big]\,, \end{aligned}$$

da cui

$$\operatorname{Re} f(z) = 2y + 5\,, \qquad \operatorname{Im} f(z) = x^2 + (y+2)^2 - 2x\,.$$

L'insieme degli $z = x + iy \in \mathbb{C}$ che soddisfano $\operatorname{Im} f(z) = 0$ e $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ è dunque costituito dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 - 2x = 0\,, \\ 2y + 5 \geq 0\,, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1\,, \\ 2y + 5 \geq 0\,. \end{cases}$$

L'equazione rappresenta una circonferenza di centro $(1, -2)$ e raggio 1, mentre la disequazione rappresenta il semipiano $y \geq -5/2$. L'intersezione è un arco di circonferenza, vedi figura 1.

2. Poiché

$$\begin{aligned} f(-5i/2) &= i\big[2\overline{(-5i/2)} - |-(5i/2) + 2i|^2\big] + 5 = i\big[5i - |-i/2|^2\big] + 5 \\ &= -5 - \frac{1}{4}i + 5 = -\frac{1}{4}i\,, \end{aligned}$$

dobbiamo calcolare le radici quarte di $(-i/4)^4$, cioè gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^4 = (-i/4)^4$. Sicuramente $z_1 = -i/4$ è soluzione. Le altre, z_2, z_3 e z_4, sono tali che z_1, z_2, z_3 e z_4 sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $1/4$ (vedi figura 2). Si ottiene allora

$$z_2 = \frac{1}{4}\,, \quad z_3 = \frac{1}{4}i\,, \quad z_4 = -\frac{1}{4}\,.$$

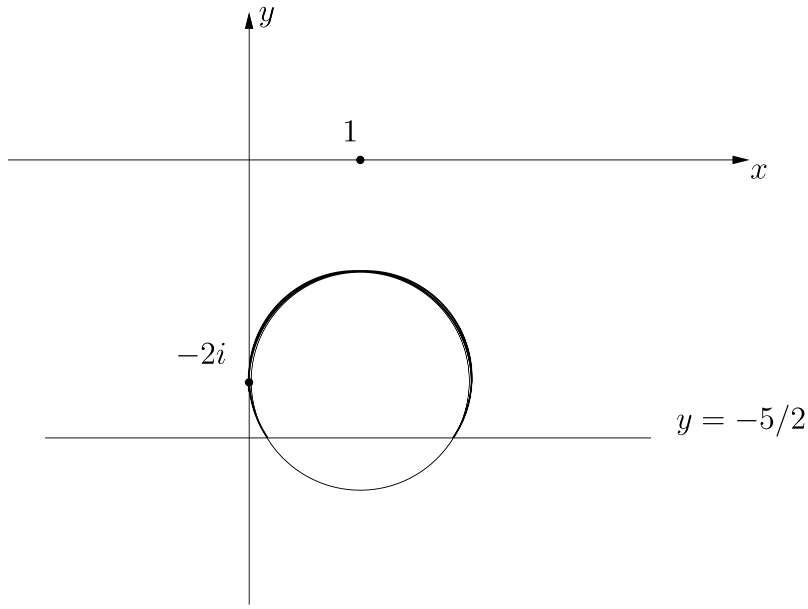

Figura 1: Esercizio 1

Esercizio 2

Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos^2 x)(\arctan x) + 1 - e^{-\sin^2 x}}{\log(1+2x) + \sin x^3}\,.$$

Svolgimento

Indicando rispettivamente con $N(x)$ e $D(x)$ il numeratore ed il denominatore della funzione di cui si deve calcolare il limite, si ha

$$\begin{aligned}
N(x) &= \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]^2 \cdot \big[x + o(x)\big] + 1 - \big[1 - \sin^2 x + o(\sin^2 x)\big] \\
&= \big[1 + o(x)\big] \cdot \big[x + o(x)\big] + \big[x + o(x)\big]^2 + o(x^2) \\
&= x + o(x)\,, \\
D(x) &= \big[2x + o(x)\big] + \big[x^3 + o(x^3)\big] \\
&= 2x + o(x)\,.
\end{aligned}$$

Quindi, usando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos^2 x)(\arctan x) + 1 - e^{-\sin^2 x}}{\log(1+2x) + \sin x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{2x + o(x)} \overset{\text{P.d.S.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}\,.$$

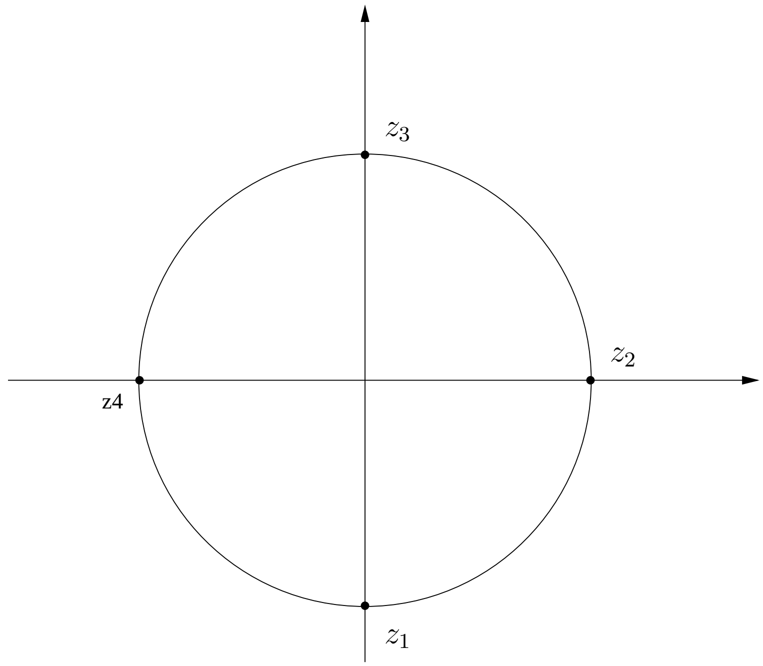

Figura 2: Esercizio 1

Esercizio 3

Dato l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{2}} \,,\ n \in \mathbb{N} \,,\ n \geq 2 \right\} ,$$

verificare,usando la definizione, che $\min \mathcal{A} = 1$ e che $\sup \mathcal{A} = 2$.

Svolgimento

Per verificare che $\min \mathcal{A} = 1$, bisogna verificare che

1. 1 è un minorante di $\mathcal{A}$, cioé

$$1 \leq 2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{2}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,,\ n \geq 2 \,; \tag{1}$$

2. $1 \in \mathcal{A}$.

Verificare (1) equivale a verificare che

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{2}} \leq 1 \,. \tag{2}$$

Poiché per $n \geq 2$

$$n^2 + 2n \geq 4 + 4 = 8 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n^2+2n} \geq \sqrt{8} > \sqrt{2} \,,$$

possiamo moltiplicare ambo i membri di (2) per $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2}$ ottenendo

$$\sqrt{2} \le \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2} \le \sqrt{n^2+2n}\,.$$

Elevando al quadrato ambo i membri, si ottiene che (1) è verificata se e solo se per ogni $n \ge 2$ vale

$$n^2+2n-8 \ge 0\,.$$

Si vede facilmente che tale disequazione è in effetti verificata per $n \ge 2$. Inoltre è verificata come uguaglianza per $n = 2$. Se ne deduce che per $n = 2$ si ottiene

$$2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2}}\bigg|_{n=2} = 1 \in \mathcal{A}\,,$$

e dunque 1 è effettivamente il minimo di $\mathcal{A}$.

Per verificare che $\sup \mathcal{A} = 2$, dobbiamo verificare che

1. 2 è un maggiorante di $\mathcal{A}$, cioé

$$2 \ge 2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ n \ge 2\,; \tag{3}$$

2. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ tale che

$$2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2}} > 2-\varepsilon\,. \tag{4}$$

Verificare (3) è banale in quanto deve essere verificata

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2}} \ge 0\,,$$

e abbiamo già osservato che $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2} > 0$. Quanto a (4), bisogna trovare almeno un $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ tale che

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2}} < \varepsilon\,, \tag{5}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{2}$, si ottiene

$$\sqrt{n^2+2n} > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} + \sqrt{2}\,.$$

Elevando ambo i membri al quadrato, si ottiene che deve essere

$$n^2+2n-\left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+\sqrt{2}\right)^2 > 0\,,$$

che è verificata una volta preso un numero naturale $n \ge 2$ tale che

$$n > -1 + \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}+\sqrt{2}\right)^2}\,.$$

Poiché un tale n esiste grazie alla proprietà di Archimede, si ha che anche (4) è verificata.