Primo compitino 2004/2005 - Tema 4B

Esercizio 1

Determinare il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che il sistema di equazioni complesse

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left(\bar{z}(iz-6)\right) = \alpha \\ \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z \end{cases} \tag{1}$$

abbia una ed una sola soluzione $z_0 \in \mathbb{C}$. Determinare z_0 e calcolare le radici quadrate di z_0^2.

Svolgimento

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left[(x-iy)(ix-y-6)\right] = \alpha \\ x = -y \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \operatorname{Im}\left[\,-x(y+6)+xy+i(x^2+y^2+6y)\right] = \alpha \\ x = -y \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x^2+y^2+6y = \alpha \\ x = -y\,. \end{cases}$$

Sostituendo $-y$ a x nella prima equazione si ottiene

$$2y^2 + 6y - \alpha = 0\,, \tag{2}$$

che ha una sola soluzione se e solo se

$$\Delta = 6^2 - 4\cdot 2\cdot(-\alpha) = 0\,,$$

cioé se e solo se $\alpha = -9/2$. In tal caso l'unica soluzione dell'equazione (2) è $y = -3/2$. Quanid la soluzione z_0 di (1) che si ottiene è

$$z_0 = \frac{3}{2} - i\frac{3}{2}\,.$$

Le radici quadrate di z_0^2 sono banalmente z_0 stesso e

$$-z_0 = -\frac{3}{2} + i\frac{3}{2}\,.$$

Esercizio 2

Siano date le funzioni

$$f(x) = e^{\tan^2 x} - 1 + x\sin^3 x, \qquad g(x) = 1 - \cos\sqrt{x} + \log(1-x^3).$$

Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ di f e g. Dimostrare poi che $\frac{f}{g}$ è infinitesima per $x \to 0^+$ e determinarne l'ordine.

Svolgimento

Poiché

$$
\begin{aligned}
e^{\tan^2 x} &= 1 + \tan^2 x + o(\tan^2 x) = 1 + \big[x + o(x)\big]^2 + o(x^2) = 1 + x^2 + o(x^2)\,,\\
x \sin^3 x &= x\big[x^3 + o(x^3)\big] = x^4 + o(x^4)\,,\\
\cos\sqrt{x} &= 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = o((\sqrt{x})^2) = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)\,,\\
\log(1 - x^3) &= -x^3 + o(x^3)\,,
\end{aligned}
$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 + x^2 + o(x^2) - 1 + x^4 + o(x^4) = x^2 + o(x^2)\,,\\
g(x) &= 1 - 1 + \frac{1}{2}x + o(x) - x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{2}x + o(x)\,,
\end{aligned}
$$

Si ha allora

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^2} &\overset{\text{P.d.S.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^2} = 1\,,\\
\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x} &\overset{\text{P.d.S.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x/2}{x} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

e quindi l'ordine di infinitesimo di f è 2 e quello di g è 1. Ne segue che f/g ha ordine di infinitesimo 1 per $x \to 0^+$ (ed è dunque infinitesima). Infatti

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)/g(x)}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{xg(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{x(x/2 + o(x))}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2/2 + o(x^2)} \overset{\text{P.d.S.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^2/2} = 2\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

Utilizzando la definizione, verificare che

$$
\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1\,.
$$

Svolgimento

Dobbiamo verificare che

$$
\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 : \quad \forall x < -M \text{ e } x < -1 \qquad \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + 1 \right| < \varepsilon\,. \tag{3}
$$

Per verificare (3), partiamo dall'ultima disuguaglianza. Questa equivale al sistema

$$
\begin{cases}
\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} < -1 + \varepsilon\\
\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > -1 - \varepsilon\,.
\end{cases} \tag{4}
$$

Si osservi che

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{|x^2-1|} > 1\,,$$

che per $x < -1$ equivale a

$$\frac{x^2}{x^2-1} > 1\,,$$

che in tal caso è sempre verificata. Quindi la prima disequazione in (4) è verificata per $x < -1$. Quanto alla seconda, si ottiene che deve essere

$$(1+\varepsilon)\sqrt{x^2-1} > -x\,,$$

da cui, potendo assumere $x < 0$,

$$(1+\varepsilon)^2(x^2-1) > x^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(\varepsilon+2)x^2 - (1+\varepsilon)^2 > 0\,,$$

che è verificata in particolare per

$$x < -\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}}\,.$$

Quindi, posto

$$M = \max\left\{1, \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+2)}}\right\}\,,$$

si ottiene che se $x < -M$ il sistema (4) è verificato, e quindi tale è anche (3).