Secondo compitino 2004/2005 - Tema 2

Esercizio 1

Data l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + \lambda y = 256x^2 e^{-8x^2-x}\,,$$

si determini $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $g(x) = e^{-8x^2-x}$ ne sia una soluzione particolare. Per tale valore di λ determinare la soluzione (integrale) generale dell'equazione differenziale.

Svolgimento

Affinché g sia soluzione, deve verificare

$$g''(x) + 2g'(x) + \lambda g(x) = 256x^2 e^{-8x^2-x}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché

$$g'(x) = -e^{-8x^2-x}(16x+1)\,, \qquad g''(x) = e^{-8x^2-x}(256x^2 + 32x - 15)\,,$$

si ottiene che deve essere

$$e^{-8x^2-x}\big(256x^2 + 32x - 15 - 32x - 2 + \lambda\big) = 256x^2 e^{-8x^2-x}\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui $\lambda = 17$.
L'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + 17y = 256x^2 e^{-8x^2-x}\,,$$

si ottiene sommando una soluzione particolare (nella fattispecie $g(x)$) all'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 2y' + 17y = 0\,.$$

L'equazione caratteristica è

$$\eta^2 + 2\eta + 17 = 0\,,$$

che ha radici complesse coniugate $\eta_1 = -1 + 4i$ e $\eta_2 = -1 - 4i$. Quindi l'integrale generale cercato è

$$y(x) = Ae^{-x}\cos 4x + Be^{-x}\sin 4x + e^{-8x^2-x}\,,$$

con A e B costanti reali.

Esercizio 2

Per $\alpha > 0$ sia data la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{(e^{2x} + 2e^x + 2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

i) Calcolare una primitiva di f_α nel caso $\alpha = 2$.

ii) Calcolare l'integrale improprio (generalizzato)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2}\, dx\,. \tag{1}$$

iii) Determinare i valori $\alpha > 0$ tali che esiste finito l'integrale improprio (generalizzato)

$$\int_{0}^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx\,. \tag{2}$$

Svolgimento

i) Con la sostituzione $t = e^x$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2}\, dx &= \int \frac{t^2 - t}{t^2 + 2t + 2} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t-1}{(t+1)^2 + 1}\, dt \\
&= \int \left[\frac{t+1}{t^2 + 2t + 2} - \frac{2}{(t+1)^2 + 1} \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \log(t^2 + 2t + 2) - 2 \arctan(t+1) + c \\
&= \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 2e^x + 2) - 2 \arctan(e^x + 1) + c\,.
\end{aligned}$$

ii) Bisogna calcolare il

$$\lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{0} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2}\, dx\,.$$

Per farlo, sfruttiamo quanto fatto al punto i):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2}\, dx &= \lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{0} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2}\, dx \\
&= \lim_{\omega \to -\infty} \left[\frac{1}{2} \log(e^{2x} + 2e^x + 2) - 2 \arctan(e^x + 1) \right]_{-\infty}^{0} \\
&= \lim_{\omega \to -\infty} \left[\frac{1}{2} \log 5 - 2 \arctan 2 \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2} \log(e^{2\omega} + 2e^\omega + 2) + 2 \arctan(e^\omega + 1) \right] \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{5}{2} - 2 \left(\arctan 2 - \frac{\pi}{4} \right)\,.
\end{aligned}$$

iii) Bisogna trovare per quali valori del parametro $\alpha > 0$ esiste finito il

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_{0}^{\omega} \frac{e^{2x} - e^x}{(e^{2x} + 2e^x + 2)^{\frac{\alpha}{2}}}\, dx\,.$$

Poiché per $x > 0$ la funzione integranda è negativa, possiamo applicare il criterio asintotico del confronto, prendendo come funzione test

$$x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^{\alpha x}} = \frac{1}{e^{(\alpha-2)x}}$$

che ha integrale convergente tra 0 e $+\infty$ se e solo se $\alpha > 2$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-e^x}{(e^{2x}+2e^x+2)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{e^{\alpha x}}{e^{2x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-e^x}{(e^{2x}+2e^x+2)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{e^{-2x}}{(e^{-2x})^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x}}{(1+2e^{-x}+2e^{-2x})^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &= 1\,,\end{aligned}$$

numero finito e non nullo. Dunque, grazie al criterio asintotico del confronto, l'integrale (2) converge se e solo se $\alpha > 2$.

Esercizio 3

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = 3\log(x+1) + \log\big|\log(x+1)\big|\,.$$

[Dominio, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico; **facoltativo: derivata seconda, convessità, concavità e flessi**]

Svolgimento

Dominio: Deve essere

$$\begin{cases} x+1>0 \\ \log(x+1)\neq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0\,, \end{cases}$$

e dunque $\mathcal{D} =]-1,+\infty[\setminus\{0\}$. La funzione è continua in $\mathcal{D}$ perché somma e composizione di funzioni continue.
Limiti ed eventuali asintoti: Si ha

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to0^\pm} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} = +\infty\,,$$

e dunque le rette di equazione $x=-1$ e $x=0$ sono asintoti verticali, mentre la funzione non ha asintoti orizzontali. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

la funzione non ha asintoti obliqui.

Derivata prima: La funzione è derivabile in $\mathcal{D}$, perché somma e composizione di funzioni derivabili. Per $x \in \mathcal{D}$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\frac{1}{x+1} + \frac{1}{\log(x+1)} \cdot \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{x+1} \cdot \frac{3\log(x+1)+1}{\log(x+1)}\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3\log(x+1)+1}{\log(x+1)} \geq 0\,,$$

essendo $x+1>0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$. Si ottiene che $f'(x) \geq 0$ se e solo se

$$\log(x+1) \leq -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad \log(x+1) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leq e^{-1/3}-1 \quad \text{o} \quad x > 0\,.$$

ed inoltre

$$f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = e^{-1/3}-1\,.$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} &f \quad \text{è crescente in} \quad \left[-1, e^{-1/3}-1\right] \quad \text{e in} \quad]0,+\infty[\,, \\ &f \quad \text{è decrescente in} \quad \left[e^{-1/3}-1, 0\right[\,, \end{aligned}$$

e il punto $x = e^{-1/3}-1$ è di massimo relativo (con $f(e^{-1/3}-1) = -1-\log 3 < 0$). La funzione non ha punti di minimo.

Derivata seconda: f' è derivabile in $\mathcal{D}'$ perché somma e prodotto di funzioni derivabili. Si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= -3\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{\log^2(x+1)} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{\log(x+1)} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{3\log^2(x+1)+\log(x+1)+1}{\log^2(x+1)}\,. \end{aligned}$$

Allora

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\log^2(x+1)+\log(x+1)+1 \leq 0\,,$$

che non è mai verificata essendo il polinomio $P(t) = 3t^2+t+1$ sempre strettamente positivo. Se ne deduce che

$$f \quad \text{è concava in} \quad]-1,0[\quad \text{e in} \quad]0,+\infty[\,,$$

e non ha punti di flesso. Un abbozzo del grafico è riportato in figura 1.

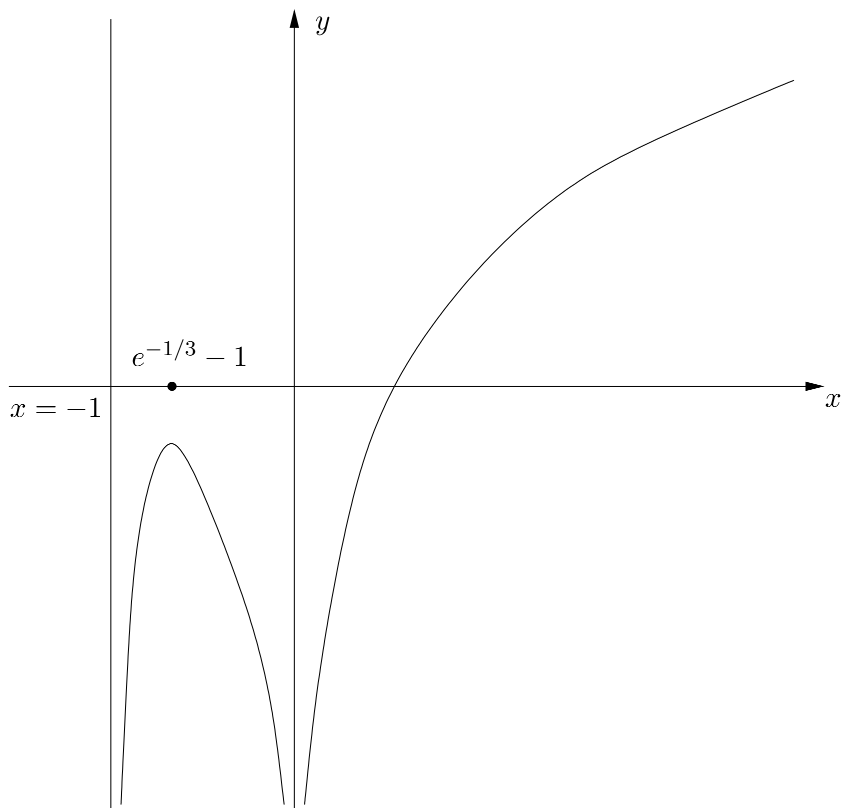

Figura 1: Esercizio 3