Primo appello 2005/2006 - Tema 1-M

Esercizio 1

Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \arctan \log \left| \frac{x+8}{x+4} \right| . \qquad (*)$$

[Dominio, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità ed eventuali prolungamenti per continuità, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima (facoltativo), monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico]

Svolgimento

Dominio: Evidentemente l'unica restrizione riguarda l'argomento del logaritmo, che deve verificare

$$\left| \frac{x+8}{x+4} \right| > 0 \quad \text{e} \quad x+4 \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \neq -8 \quad \text{e} \quad x \neq -4 ,$$

per cui il dominio D della funzione è l'insieme

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -8\} .$$

Segno: Si ha

$$f(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \log \left| \frac{x+8}{x+4} \right| \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left| \frac{x+8}{x+4} \right| \geq 1$$

cioè se e solo se

$$\frac{x+8}{x+4} \leq -1 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x+8}{x+4} \geq 1 .$$

Dalla prima si ottiene

$$2 \cdot \frac{x+6}{x+4} \leq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -6 \leq x < -4 ,$$

e dalla seconda

$$\frac{4}{x+4} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > -4 .$$

Dunque

1. $f(x) > 0$ se e solo se $x > -6$ e $x \neq -4$;
2. $f(x) < 0$ se e solo se $x < -6$ e $x \neq -8$;
3. $f(x) = 0$ se e solo se $x = -6$.

Limiti ed eventuali asintoti: Poiché

$$\lim_{x \to -8^{\pm}} \log \left| \frac{x+8}{x+4} \right| = -\infty ,$$

risulta

$$\lim_{x\to -8^{\pm}} f(x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

e quindi f è prolungabile per continuità in $x=-8$ ponendo $f(-8)=-\pi/2$. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to -4^{\pm}} \log\left|\frac{x+8}{x+4}\right| = +\infty\,,$$

risulta anche

$$\lim_{x\to -4^{\pm}} f(x) = \frac{\pi}{2}\,,$$

e dunque f è anche prolungabile per continuità in $x=-4$, ponendo $f(-4)=\pi/2$. In questo modo f risulta funzione continua su tutta la retta reale. È evidente che, poiché $|f(x)|\le \pi/2$, $x=-8$ e $x=-4$ risultano rispettivamente punto di minimo assoluto e punto di massimo assoluto per la funzione prolungata. Inoltre, essendo limitata, f non ha asintoti verticali. Ricerchiamo eventuali asintoti orizzontali: poiché

$$\lim_{x\to \pm\infty} \log\left|\frac{x+8}{x+4}\right| = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0\,,$$

e quindi la retta di equazione $y=0$ è asintoto orizzontale completo per f, che allora non ammette asintoti obliqui.

Derivata prima: In D la funzione è derivabile essendo composizione di funzioni derivabili. Per $x\in D$ si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\log^2\left|\dfrac{x+8}{x+4}\right|}\cdot\frac{x+4}{x+8}\cdot\frac{x+4-(x+8)}{(x+4)^2} \\ &= -\frac{4}{1+\log^2\left|\dfrac{x+8}{x+4}\right|}\cdot\frac{1}{(x+4)(x+8)}\,. \end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{x\to -8}\left(1+\log^2\left|\frac{x+8}{x+4}\right|\right)(x+8) = 0\,,$$

$$\lim_{x\to -4}\left(1+\log^2\left|\frac{x+8}{x+4}\right|\right)(x+4) = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to -8^-} f'(x) = -\infty\,,\quad \lim_{x\to -8^+} f'(x) = +\infty\,,\quad \lim_{x\to -4^-} f'(x) = +\infty\,,\quad \lim_{x\to -4^+} f'(x) = -\infty\,,$$

e quindi $x=-8$ e $x=-4$ sono cuspidi. Quanto al segno di $f'(x)$, è evidente che

$$f'(x)\ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x+4)(x+8)\le 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -8<x<-4\,,$$

da cui risulta che

1. f è strettamente crescente in $[-8, -4]$;
2. f è strettamente decrescente in $]-\infty, -8]$ e in $[-4, +\infty[$;
3. ha un punto di minimo assoluto in $x = -8$ e di massimo assoluto in $x = -4$, come avevamo già osservato.

Un abbozzo del grafico si trova in figura 1.

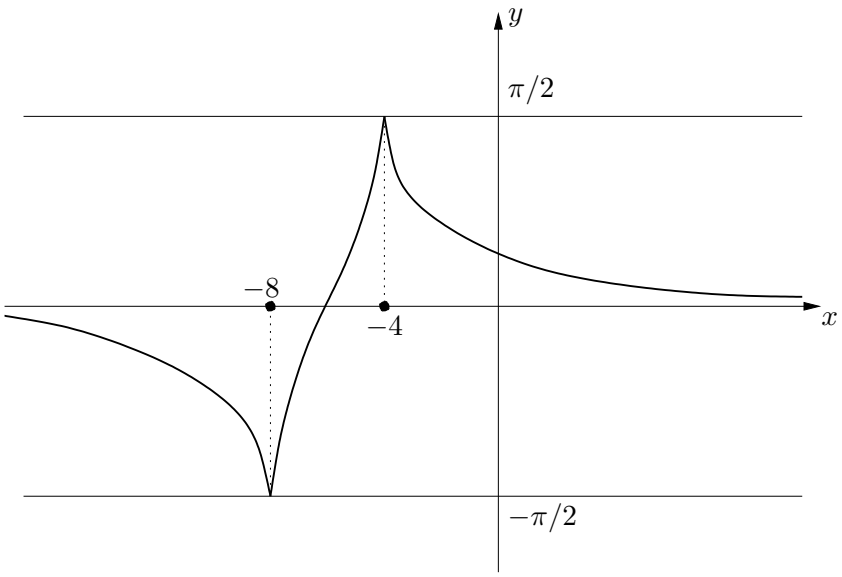

Figura 1: Esercizio 1

Esercizio 2

Calcolare, se esiste, l'ordine di infinitesimo di f in $(*)$ (Esercizio 1)

1. per $x \to -6$ (rispetto a $(x+6)$);
2. per $x \to +\infty$ (rispetto a $1/x$).

Svolgimento

1. Poiché per $x \to -6$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan\log\left|-1+\left(\frac{x+8}{x+4}+1\right)\right| = \arctan\log\left|-1+2\cdot\frac{x+6}{x+4}\right| \\ &= \arctan\log\left(1-2\cdot\frac{x+6}{x+4}\right) \\ &= \log\left(1-2\cdot\frac{x+6}{x+4}\right)+o\left(\log\left(1-2\cdot\frac{x+6}{x+4}\right)\right) \\ &= -2\cdot\frac{x+6}{x+4}+o\left(\frac{x+6}{x+4}\right), \end{aligned}$$

si ottiene

$$\lim_{x\to -6} \frac{f(x)}{x+6} \overset{\text{PdS}}{=} \lim_{x\to -6} -2\cdot \frac{x+6}{x+4}\cdot \frac{1}{x+6} = 1\,,$$

da cui si deduce che l'ordine di infinitesimo richiesto è 1.

2. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan\log\left|1+\left(\frac{x+8}{x+4}-1\right)\right| = \arctan\log\left(1+\frac{4}{x+4}\right) \\ &= \log\left(1+\frac{4}{x+4}\right) + o\left(\log\left(1+\frac{4}{x+4}\right)\right) \\ &= \frac{4}{x+4} + o\left(\frac{4}{x+4}\right)\,. \end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) \overset{\text{PdS}}{=} \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{4}{x+4} = 4\,,$$

e quindi l'ordine di infinitesimo richiesto è 1.

Esercizio 3

Disegnare sul piano di Guass l'insieme

$$S = \left\{ z\in\mathbb{C} : \text{Im}\left(\frac{z+1}{z-i}\right) \le 0\,, \quad |z-1-i|\le 1 \right\}\,.$$

Svolgimento

Si osservi che certamente $i \notin S$, perchè $(z+1)/(z-i)$ non è definito per $z=i$. Poniamo $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-i} &= \frac{x+1+iy}{x+i(y-1)}\cdot\frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)} = \frac{(x+1)x+y(y-1)+i\big[xy-(x+1)(y-1)\big]}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{(x+1)x+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{xy-(x+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2}\,, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\text{Im}\left(\frac{z+1}{z-i}\right) = \frac{xy-(x+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2}\,.$$

Dunque

$$\text{Im}\left(\frac{z+1}{z-i}\right)\le 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad xy-(x+1)(y-1)\le 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x-y+1\le 0\,.$$

Sul piano di Gauss la disequazione $y \ge x+1$ rappresenta il semipiano al di sopra della retta di equazione $y = x+1$. La disequazione $|z-1-i|\le 1$ rappresenta il cerchio di centro $z_0 = 1+i$ e raggio 1. Per disegnare S bisogna intersecare tale cerchio con il semipiano di cui sopra, escludendo il punto $z=i$ (vedi figura 2).

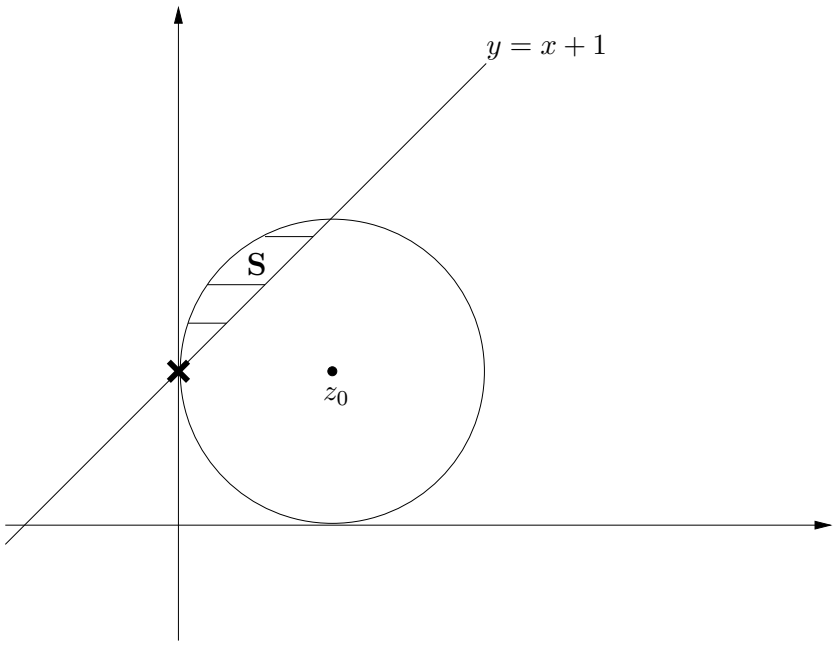

Figura 2: Esercizio 2

Esercizio 4

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n(x^2+7x+12)^n}{12^n(n^2+1)}\,.$$

Svolgimento

Studiamo la convergenza assoluta, e quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n|x^2+7x+12|^n}{12^n(n^2+1)}\,.$$

Usando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n|x^2+7x+12|^n}{12^n(n^2+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}|x^2+7x+12|}{12\sqrt[n]{n^2+1}} = \frac{|x^2+7x+12|}{12}\,.$$

Distinguiamo tre casi.

1. $$\frac{|x^2+7x+12|}{12} < 1\,. \tag{1}$$

   In tal caso la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente. Osserviamo che (1) è verificata se e solo se

   $$-1 < \frac{x^2+7x+12}{12} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2+7x+12 > -12 \\ x^2+7x+12 < 12\,. \end{cases}$$

La prima disequazione, $x^2 + 7x + 24 > 0$, è sempre verificata perché il discriminante del polinomio di secondo grado è $\Delta = 49 - 2 \cdot 24 < 0$. Quindi (1) è verificata se e solo se

$$x^2 + 7x + 12 < 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad -7 < x < 0\,.$$

Dunque, se $x \in]-7, 0[$, la serie converge assolutamente.

2.

$$\frac{|x^2 + 7x + 12|}{12} > 1\,. \tag{2}$$

In tal caso il termine generale della serie non è infinitesimo, e quindi la serie non può convergere assolutamente né semplicemente. Grazie al lavoro svolto al punto 1, (2) è verificata se e solo se

$$x < -7 \quad \text{oppure} \quad x > 0\,.$$

Dunque, se $x \in]-\infty, -7[$ oppure $x \in]0, +\infty[$, la serie non converge assolutamente né semplicemente.

3.

$$\frac{|x^2 + 7x + 12|}{12} = 1\,. \tag{3}$$

Osserviamo che (3) vale se e solo se $x = -7$ oppure $x = 0$. In tal caso la serie dei moduli si riduce a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}\,,$$

che è divergente per il criterio asintotico del confronto perché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n/(n^2+1)}{1/n} = 1\,,$$

e la serie armonica notoriamente diverge. Studiamo la convergenza semplice. Per $x = 0$ o $x = -7$ si ha

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{12} = 1\,,$$

e la serie si riduce a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}\,,$$

che è una serie a termini di segno alterno. Si osservi che

(a)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0\,;$$

(b) la successione

$$n \mapsto \frac{n}{n^2+1} \doteq a_n$$

è decrescente. Infatti $a_{n+1} \le a_n$ se e solo se

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \le \frac{n}{n^2+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad (n^2+1)(n+1) \le n(n^2+2n+2)\,,$$

cioè se e solo se $n^2 + n - 1 \ge 0$, che è sempre verificata per $n \ge 2$.

Se ne deduce che la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

Riassumendo:

- la serie converge assolutamente, e quindi anche semplicemente, se e solo se $-7 < x < 0$;
- la serie converge semplicemente, ma non assolutamente, se e solo se $x = 0$ oppure $x = -7$;
- se $x < -7$ oppure $x > 0$, la serie non converge assolutamente né semplicemente.