Primo appello 2005/2006 - Tema 1-P

Esercizio 1

Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ in modo che $z_0 = -2i$ sia radice del polinomio complesso

$$P(z) = z^7 + \lambda z^6 - 8iz^4 + 16z^3\,.$$

Per tale λ trovare tutte le radici di $P(z)$.

Svolgimento

Affinché z_0 sia radice deve essere $P(z_0) = 0$ da cui si ottiene

$$\begin{aligned} 0 = P(z_0) &= (-2i)^7 + \lambda(-2i)^6 - 8i(-2i)^4 + 16(-2i)^3 \\ &= 2^7 i - 2^6\lambda - 2^7 i + 2^7 i\,, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$-\lambda + 2i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2i\,.$$

Il polinomio P diventa

$$P(z) = z^7 + 2iz^6 - 8iz^4 + 16z^3 = z^3(z^4 + 2iz^3 - 8iz + 16)\,,$$

Da cui si deduce che $z = 0$ è radice. Le altre sono le soluzioni di

$$z^4 + 2iz^3 - 8iz + 16 = 0\,.$$

Dividendo $z^4 - 2iz^3 - 8iz + 16$ per $z + 2i$ si ottiene

$$z^4 + 2iz^3 - 8iz + 16 = (z + 2i)(z^3 - 8i)\,,$$

e quindi le altre radici di $P(z)$ sono le soluzioni di $z^3 = 8i$, cioè le radici terze di $8i$. Poiché una è $z_1 = -2i$, le altre, chiamiamole z_2 e z_3, si ottengono ricordando che z_1, z_2 e z_3 sul piano di Gauss sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[3]{|8i|} = 2$. Si ottiene

$$z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i\,, \qquad z_3 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i\,.$$

Esercizio 2

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = 2\arcsin\frac{1}{\cosh(x+1)} - x\,.$$

1. Determinare il dominio D di f ed i limiti agli estremi di D, compresi eventuali asintoti.
2. Determinare gli insiemi dove f è continua, dove è derivabile e stabilire la natura di eventuali punti di non derivabilità.
3. Determinare gli intervalli di monotonia con eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.
4. Abbozzare il grafico di f.
5. Dimostrare che f ha un solo zero (facoltativo).

Svolgimento

1. Affinché f sia definita deve essere

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1}{\cosh(x+1)}\right| \le 1\,, \\ \cosh(x+1) \neq 0\,, \end{cases}$$

che sono entrambe verificate essendo $\cosh(x+1) \ge 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, valgono

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2\arcsin\frac{1}{\cosh(x+1)} - x\right) = 2\arcsin 0 - \lim_{x\to+\infty} x = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2\arcsin\frac{1}{\cosh(x+1)} - x\right) = 2\arcsin 0 - \lim_{x\to-\infty} x = +\infty\,,$$

da cui si deduce che f non ha asintoti orizzontali. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm+\infty}\left[\frac{2\arcsin\left[1/\cosh(x+1)\right]}{x} - 1\right] = -1\,,$$

$$\lim_{x\to\pm+\infty}\left[f(x)+x\right] = \lim_{x\to\pm+\infty} 2\arcsin\frac{1}{\cosh(x+1)} = 0\,,$$

e quindi la retta di equazione $y = -x$ è asintoto obliquo completo per f.

2. f è funzione continua su tutta la retta reale essendo composizione di funzioni continue, e quindi non ha asintoti verticali. Inoltre, *a priori*, risulta derivabile per $\cosh(x+1) \neq 1$, cioè per $x \neq -1$, poiché la funzione $y \mapsto \arcsin y$ non è derivabile per $y = \pm 1$. Per $x \neq -1$ calcoliamo $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\cosh^2(x+1)}}}\cdot\left(-\frac{1}{\cosh^2(x+1)}\right)\cdot\sinh(x+1) - 1 \\ &= -\frac{2\cosh(x+1)}{\sqrt{\cosh^2(x+1)-1}}\cdot\frac{1}{\cosh^2(x+1)}\cdot\sinh(x+1) - 1 \\ &= -\frac{2}{\cosh(x+1)\sqrt{\sinh^2(x+1)}}\cdot\sinh(x+1) - 1 \\ &= -\frac{2}{\cosh(x+1)}\cdot\frac{\sinh(x+1)}{|\sinh(x+1)|} - 1 = -\frac{2\mathrm{sgn}\sinh(x+1)}{\cosh(x+1)} - 1 \\ &= -\frac{2\mathrm{sgn}(x+1)+\cosh(x+1)}{\cosh(x+1)}\,, \end{aligned}$$

essendo $\mathrm{sgn}\sinh(x+1) = \mathrm{sgn}(x+1)$. Calcolando i limiti di f' a destra e sinistra di -1 si ottiene

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-}\frac{2-\cosh(x+1)}{\cosh(x+1)} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} -\frac{2+\cosh(x+1)}{\cosh(x+1)} = -3\,,$$

e dunque $x = -1$ è punto angoloso.

3. Studiamo il segno di f'. Poiché $\cosh(x+1) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ottiene che, per $x \neq -1$,
$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathrm{sgn}(x+1) + \cosh(x+1) \leq 0\,.$$
Si ottiene
   (a) se $x < -1$,
   $$\cosh(x+1) - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cosh(x+1) \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 - \operatorname{settcosh} 2 \leq x < -1\,;$$
   (b) se $x > -1$,
   $$\cosh(x+1) + 2 \leq 0\,,$$
   che non è mai verificata.

   Se ne deduce che
   (a) f è strettamente crescente in $[-1 - \operatorname{settcosh} 2, -1]$
   (b) f è strettamente decrescente in $]-\infty, -1 - \operatorname{settcosh} 2]$ e in $[-1, +\infty[$.

   Quindi $x = -1 - \operatorname{settcosh} 2$ è punto di minimo relativo e $x = -1$ è punto di massimo relativo.

4. Un abbozzo del grafico si trova in figura 1.

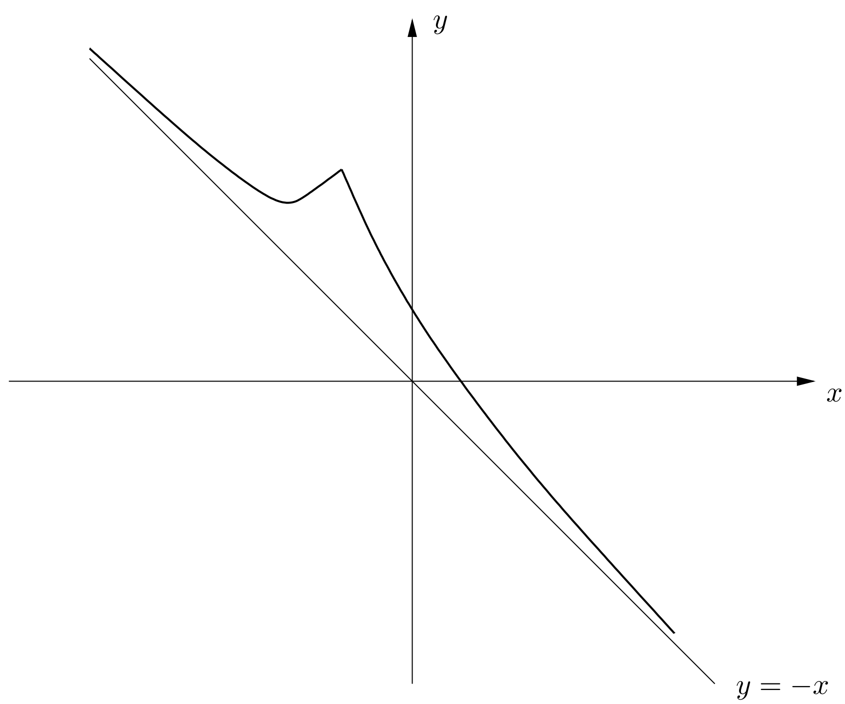

Figura 1: Esercizio 2

5. Si osservi che in $]-\infty,-1]$ la funzione ha un minimo assoluto in $x=-1-\operatorname{settcosh} 2$ dove vale

$$\begin{aligned} f(-1-\operatorname{settcosh} 2) &= 2\arcsin \frac{1}{\cosh(-\operatorname{settcosh} 2)} - (-1-\operatorname{settcosh} 2) \\ &= 2\arcsin\frac{1}{2} + 1 + \operatorname{settcosh} 2 \\ &= \frac{\pi}{3} + 1 + \operatorname{settcosh} 2 > 0\,, \end{aligned}$$

e dunque f è strettamente positiva. Nell'intervallo $[-1,+\infty[$ la funzione è strettamente decrescente e quindi, essendo iniettiva, ha al più uno zero. Questo esiste per il teorema di Bolzano, poichè $f \in \mathcal{C}^0([-1,+\infty[)$ e valgono

$$f(-1) > f(-1-\operatorname{settcosh} 2) > 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\,,$$

1. scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro $x_0 = 0$;
2. stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right] (e^{2x}-1)^\alpha \; dx\,.$$

Svolgimento

1. Il polinomio di Taylor $T(x)$ cercato ha la forma

$$T(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2\,.$$

Essendo

$$f'(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\,, \qquad f''(x) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} T(x) &= \sin\left(0+\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(0+\frac{\pi}{6}\right)x - \frac{1}{2}\sin\left(0+\frac{\pi}{6}\right)x^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{4}x^2\,. \end{aligned}$$

2. Affinché l'integrale improprio converga deve esistere finito il

$$\lim_{\omega\to 0^+} \int_\omega^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right] (e^{2x}-1)^\alpha \; dx\,.$$

Dal punto 1, si ottiene che

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\,,$$

e dunque la funzione integranda è positiva in un intorno di $x_0 = 0$. Sapendo che $e^{2x} - 1 = 2x + o(x)$ per $x \to 0$, si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] (e^{2x} - 1)^\alpha \cdot \frac{1}{x^{2+\alpha}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{e^{2x} - 1}{x}\right)^\alpha$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/4)x^2 + o(x^2)}{x^2} \cdot \left(\frac{2x + o(x)}{x}\right)^\alpha \overset{\text{PdS}}{=} \frac{1}{4} \cdot 2^\alpha = 2^{\alpha-2},$$

numero finito e diverso da zero. Per il criterio asintotico del confronto l'integrale improprio converge se e solo se converge

$$\int_0^{\pi/3} x^{2+\alpha}\, dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{x^{-2-\alpha}}\, dx,$$

cioè se e solo se $-2 - \alpha < 1$ da cui $\alpha > -3$.

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_0^1 x \arctan(x + 1)\, dx.$$

Svolgimento

Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^1 x \arctan(x+1)\, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan(x+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1 + (x+1)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\arctan 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{2x+2}{1+(x+1)^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\arctan 2 - \frac{1}{2}\Big[x - \log\left(1 + (x+1)^2\right)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\arctan 2 - \frac{1}{2}(1 - \log 5 + \log 2).$$