Secondo appello 2005/2006 - Tema 1

Esercizio 1

Risolvere l'equazione di variabile complessa

$$z^2 + 2iz + 2\bar{z} = 0\,, \tag{1}$$

determinando le soluzioni in forma algebrica.

Svolgimento

Ponendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$(x+iy)^2 + 2i(x+iy) + 2(x-iy) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - y^2 - 2y + 2x + 2i(xy + x - y) = 0\,,$$

che è verificata se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2y + 2x = 0\,, \\ xy + x - y = 0\,. \end{cases}$$

Si osservi che, poiché per $y = -1$ non ci sono soluzioni, la seconda equazione equivale a

$$x = \frac{y}{y+1}\,, \tag{2}$$

che sostituita nella prima conduce a

$$\frac{y^2}{(y+1)^2} - y^2 - 2y + \frac{2y}{y+1} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y \cdot \frac{y - y(y+1)^2 - 2(y+1)^2 + 2(y+1)}{(y+1)^2} = 0\,,$$

da cui si ottiene

$$-\frac{y^2}{(y+1)^2} \cdot (y^2 + 4y + 2) = 0\,.$$

Una soluzione è $y = 0$, e da (2) si ricava $x = 0$, cioè $z_0 = 0$. Le altre soluzioni sono le radici di

$$y^2 + 4y + 2 = 0\,,$$

cioè

$$y_1 = -2 - \sqrt{2}\,, \qquad \text{e da (2)} \qquad x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,,$$

$$y_2 = -2 + \sqrt{2}\,, \qquad \text{e da (2)} \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\,.$$

Quindi le soluzioni di (1) sono

$$z_0 = 0\,, \qquad z_1 = \sqrt{2} - i(2+\sqrt{2})\,, \qquad z_2 = -\sqrt{2} - i(2-\sqrt{2})\,.$$

Esercizio 2

Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x+3}\,.$$

[Dominio, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico]

Svolgimento

Dominio: Deve essere

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0\,, \\ x + 3 \neq 0\,, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \leq 0 \quad \text{oppure} \quad x \geq 2\,, \\ x \neq -3\,. \end{cases}$$

Quindi il dominio D di f è

$$D =]-\infty, -3[\cup]-3, 0] \cup [2, +\infty[\,.$$

Segno: Poiché $\sqrt{x^2-2x} \geq 0$ per ogni $\in D$, si ha

$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > -3\,, \quad x \notin]0,2[\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x > -3\,, \quad x \notin]0,2[\,, \\ f(x) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = 2\,, \\ f(x) < 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x < -3\,. \end{aligned}$$

Limiti ed eventuali asintoti: Si ha

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty\,,$$

e quindi la retta di equazione $x = -3$ è asintoto verticale per la funzione. Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2-2x}{(x+3)^2}} = 1\,,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\sqrt{\frac{x^2-2x}{(x+3)^2}} = -1\,,$$

da cui si deduce che la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, mentre la retta di equazione $y = -1$ è asintoto orizzontale a $-\infty$. Ovviamente la funzione non può avere asintoti obliqui.

Continuità: La funzione risulta continua in D essendo composizione e rapporto di funzioni continue con denominatore non nullo.

Derivabilità: A priori, f è derivabile solo in $D \setminus \{0, 2\}$, perché in tale insieme f è composizione di funzioni derivabili e la funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ non è derivabile in $t = 0$. Per $x \in D \setminus \{0, 2\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2)(x+3) - \sqrt{x^2-2x}}{(x+3)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x+3) - (x^2-2x)}{\sqrt{x^2-2x}(x+3)^2} \\ &= \frac{4x-3}{(x+3)^2\sqrt{x^2-2x}} \end{aligned}$$

Si ha
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty\,,$$
e dunque f non è derivabile in $x=0$ e in $x=2$.
Monotonia e punti di estremo: Poichè $(x+3)^2\sqrt{x^2-2x} \geq 0$ per ogni $x \in D\setminus\{0,2\}$, si ottiene che
$$f'(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > 2\,.$$
Se ne deduce che

1. f è strettamente crescente in $[2,+\infty[$;
2. f è strettamente decrescente in $]-\infty,-3[$ e in $]-3,0]$;
3. f ha punti di minimo relativo in $x=0$ e in $x=2$.

Un abbozzo del grafico si trova in figura 1.

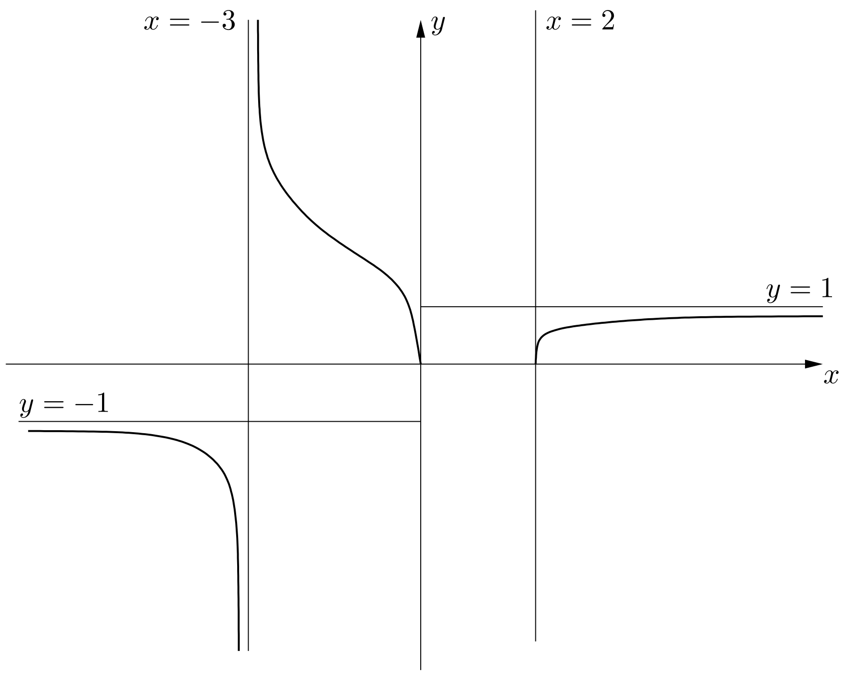

Figura 1: Esercizio 2

Esercizio 3

Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - (e^x-1)\cosh\sqrt{x} + \cos x^2 - 1}{\log\cos x + x^3\cdot\log x}\,.$$

Svolgimento

Scriviamo, ove possibile, gli sviluppi di Mac Laurin delle funzioni coinvolte. Siano

$$\begin{aligned} N(x) &\doteq \sin x - \cosh\sqrt{x}(e^x-1) + \cos x^2 - 1\,, \\ D(x) &\doteq \log\cos x + x^3 \cdot \log x\,. \end{aligned}$$

Per le funzioni coinvolte in $N(x)$ si ha

$$\sin x = x + o(x^2)\,, \qquad \cosh\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x^{3/2})\,,$$

$$e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\,, \qquad \cos x^2 - 1 = o(x^3)\,,$$

da cui

$$\begin{aligned} N(x) &= x + o(x^2) - \left(1 + \frac{1}{2}x + o(x^{3/2})\right)\left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) + o(x^3) \\ &= x + o(x^2) - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + o(x^3) \\ &= -x^2 + o(x^2)\,. \end{aligned}$$

Per $D(x)$ si ha

$$\log\cos x = \cos x - 1 + o(\cos x - 1) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\,,$$

e si osservi che $x^3 \log x = o(x^2)$ per $x \to 0^+$, da cui si ottiene che

$$D(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\,.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \cosh\sqrt{x}(e^x-1) + \cos x^2 - 1}{\log\cos x + x^3 \cdot \log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \overset{\text{PdS}}{=} 2\,.$$

Esercizio 4

Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 5}\, y\sqrt{9-y}\,.$$

i) Determinare le soluzioni costanti.

ii) Trovare la soluzione in forma implicita del Problema di Cauchy con dato iniziale $y(\log 2) = 8$.

iii) **(facoltativo)** Trovare la forma esplicita della soluzione di cui al punto precedente.

Svolgimento

i) Le soluzioni costanti si trovano imponendo

$$y\sqrt{9-y} = 0\,.$$

Si ottiene che $y(x) \equiv 0$ e $y(x) \equiv 9$ sono le soluzioni cercate.

ii) Separando le variabili si ottiene che dobbiamo calcolare

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{9-y}} \qquad \text{e} \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+5}\,dx\,. \tag{3}$$

Per il primo integrale, con la sostituzione $t = \sqrt{9-y}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y\sqrt{9-y}} &= -\int \frac{2t}{(9-t^2)t}\,dt = \int \frac{2}{(t^2-9)}\,dt = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right)\,dt \\ &= \frac{1}{3}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + c \\ &= \frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{9-y}-3}{\sqrt{9-y}+3}\right| + c\,,\end{aligned}$$

dove c è una costante arbitraria. Per il secondo integrale in (3) con la sostituzione $t = e^x$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+5}\,dx &= \int \frac{1}{t^2-4t+5}\,dt = \int \frac{1}{1+(t-2)^2}\,dt \\ &= \arctan(t-2) + c \\ &= \arctan(e^x-2) + c\,,\end{aligned}$$

dove di nuovo c è una costante arbitraria. Si ottiene che una soluzione non costante $y = y(x)$ dell'equazione differenziale deve soddisfare

$$\frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{9-y(x)}-3}{\sqrt{9-y(x)}+3}\right| = \arctan(e^x-2) + c\,. \tag{4}$$

Per trovare, in forma implicita, la soluzione del Problema di Cauchy con dato iniziale $y(\log 2) = 8$, sostituiamo tali dati in (4) e calcoliamo c:

$$\frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{9-8}-3}{\sqrt{9-8}+3}\right| = \arctan(e^{\log 2}-2) + c \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \frac{1}{3}\log\frac{1}{2}\,.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$\frac{1}{3}\log\left|\frac{\sqrt{9-y(x)}-3}{\sqrt{9-y(x)}+3}\right| = \arctan(e^x-2) + \frac{1}{3}\log\frac{1}{2}\,. \tag{5}$$

iii) Da (5), applicando la funzione esponenziale ad ambo i membri, si ottiene

$$\left|\frac{\sqrt{9-y(x)}-3}{\sqrt{9-y(x)}+3}\right| = \frac{1}{2}e^{3\arctan(e^x-2)}\,. \tag{6}$$

Poiché $y(\log 2) = 8$, si ha

$$\left.\frac{\sqrt{9-y(x)}-3}{\sqrt{9-y(x)}+3}\right|_{x=\log 2} = -\frac{1}{2} < 0\,,$$

e sfruttando questa informazione in (6) si ottiene che la soluzione cercata soddisfa

$$\frac{3-\sqrt{9-y(x)}}{\sqrt{9-y(x)}+3} = \frac{1}{2}e^{3\arctan(e^x-2)}\,,$$

da cui si deduce che

$$\sqrt{9-y(x)} = 3\frac{2-e^{3\arctan(e^x-2)}}{2+e^{3\arctan(e^x-2)}}\,.$$

Elevando al quadrato si ottiene

$$y(x) = 9-9\left(\frac{2-e^{3\arctan(e^x-2)}}{2+e^{3\arctan(e^x-2)}}\right)^2\,.$$